

2011 6

# 大学数学

College

第二十七卷 VOL.27

Mathematics

Daxue Shuxue

ISSN 1672-1454



9 771672 145009

# 大学数学

2011年12月

第27卷 第6期(总第156期)

## 目 录

教  
学  
改  
革

- 关于高等数学课程分层次教学的实践与思考..... 曹宗宏,汪宏喜,毕守东(1)  
将素质教育贯穿于数学教学的始终..... 姚泽清,苏展,徐丹丹(5)  
在高等数学教学中学生团队合作学习的实践与效果..... 苏德矿(8)  
《线性代数(非数学专业)》整体教学的实践与认识.....  
..... 王瑞,夏爱生,刘艳娜,胡保安,钟敏(11)  
《微分方程数值解法》课程实践教学改革初探..... 陈永雪(15)  
基于经管类学生素质培养视阈探析经管数学基础教改..... 聂高辉(18)

专  
题  
研  
究

- 一类平面图的多项式及其根的计算方法(英文)..... 张淑敏(22)  
二阶非线性微分方程组三点边值问题的多个正解(英文)..... 李海燕,曹怀火(28)  
几个关于二次域基本单位的结果(英文)..... 姚钟磊,李江华(35)  
 $\rho^-$ 混合序列的大数定律和完全收敛性..... 战英杰(42)  
广义拟凹映射和向量极小极大不等式..... 罗贤强(47)  
Bayes估计与最小二乘估计的一个新的相对效率..... 周小双(52)  
 $Z[\sqrt{-m}]$ 为唯一因子分解整环的刻画..... 向大晶,刘先平,覃海艳(56)  
删失数据下线性回归模型的参数估计..... 徐芹(60)  
超混沌系统的混合同步控制..... 刘永建(65)  
基于模糊系数的投资组合优化模型及其实证分析..... 李春泉,金检华,刘新平(70)  
最大公因式的一个性质..... 丁双双(77)  
Euler数, Bernoulli数及有序Bell数的渐近估计..... 李志荣,李秀琴,袁文俊(80)  
一类二阶常微分方程初值问题的无穷多解性..... 王海玲,张志军(85)  
关于内射模的P-平坦性..... 王修建,杜先能(88)  
用正交对角拉丁方及幻矩与和阵构造 $mn$ 阶标准二次幻方..... 潘凤雏(93)  
色散方程两层绝对稳定隐格式..... 花小琴,张大凯,胥德平(96)  
中医五行学说思维模型研究..... 房庆祥,王巍(100)  
广义凸函数的特征性质..... 赵宇,黄金莹,康兆敏(105)  
数量特征敏感性问题随机化回答的改进模型..... 饶贤清(111)

计  
算  
机  
辅  
助  
教  
学

- 计算机及数学软件在高职数学教学中的应用..... 邓雁城,王信峰(115)  
大学数学多媒体教学的利与弊..... 任叶庆,韩旭里,张鸿雁,郑洲顺(120)

幂分布 .....	邬学军,唐 明(123)
一个条件收敛级数重排项后的和 .....	唐建国(130)
范德蒙行列式的新证明及其应用 .....	叶彩儿(135)
光滑曲线与可求长曲线的注记 .....	付必胜,杨益民,沙 峰(140)
有重复组合公式的几种证明方法 .....	张晓琴,李顺勇(143)
关于数列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 的不等式 .....	郭松柏,沈有建(146)
两道考研试题的探讨 .....	宁荣健,苏灿荣,殷 明(150)
积分第二中值定理中间点函数的连续性及其可微性 .....	丁一鸣,陈晓红,王家正(153)
一类两个随机变量函数的分布 .....	马军英(157)
一种判断多项式函数极值点和拐点个数的简单方法 .....	明万元,黄香蕉(161)
求代数曲线斜渐近线的一种新方法 .....	丁雪梅(164)
几类级数敛散性的一些探讨 .....	吴 栩,杨 柳(167)
一类总体参数的统计推断方法 .....	孙 宇,宋立新(171)
用参数展开法计算一类含对数函数的定积分 .....	邱为钢,倪仁兴(174)
关于 $n$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中闭集的教学思考 .....	王卫东(177)
从“求圆截线平面问题”的研究谈学生能力的培养 .....	刘德金(180)
高等代数中关键词教学法的探索 .....	严文利(187)
《多元统计与回归分析》课程设计及教学探讨 .....	张 翼,张庆灵(192)
关于概率统计教学中“识”的培养 .....	张栋栋,张德然,何鹏光(195)

一些国外微积分教材的特色分析 .....	黄晓英,滕吉红,彭昌勇(200)
美国微积分教材的应用性和启发性赏析 .....	张 荣,过榴晓(203)

# 一类二阶常微分方程初值问题的无穷多解性

王海玲, 张志军

(烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

[摘 要] 应用分离变量法, 得到了一类二阶微分方程初值问题存在无穷多个非负解的充分必要条件, 并给出了所有的无穷多个非负解.

[关键词] 二阶非线性微分方程; 初值问题; 无穷多解

[中图分类号] O172.1 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1454(2011)06-0085-03

本文应用分离变量法, 得到了一类二阶非线性微分方程初值问题

$$u''(t) = f(u(t)), \quad t > 0, \quad u(0) = u'(0) = 0 \quad (1)$$

的所有无穷多个非负解.

该问题是二阶非线性微分方程的基本问题, 见文献[1-3].

本文的结果是:

定理 1.1 设  $f$  满足

$$(f1) \quad f \in C[0, \infty), \quad f(0) = 0, \quad f(s) > 0, \quad \forall s > 0,$$

则问题(1)存在无穷多个非负解的充分必要条件是  $f$  满足

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(s)}} < \infty, \quad (2)$$

其中  $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau, \quad s \geq 0$ .

注 1 问题 (2) 的解属于  $C^2[0, \infty)$ .

注 2 这时出现了微分方程界非常有名的现象: 在平凡解和正解围成的区域中任取一点, 都有问题(1)的解经过该点, 即解充满了该区域.

## 1 定理的证明

证 明显地,  $u \equiv 0$  是平凡解.

充分性. 先求解正解 (即当  $t > 0$  时,  $u(t) > 0$ ). 由  $u'$  的单调递增性, 结合  $u'(0) = 0$  可知, 问题(1)的解都是单调递增的. 我们先证正解  $u$  在  $[0, \infty)$  是严格单调递增的. 反证法. 若存在  $t_2 > t_1 > 0$  使得  $u(t_1) = u(t_2)$ , 则  $u(t) \equiv u(t_1) > 0, \forall t \in [t_1, t_2]$ . 由 (f1) 可知, 此时,  $u$  在  $[t_1, t_2]$  不满足方程. 矛盾. 因此, 正解  $u$  在  $[0, \infty)$  是严格单调递增的. 方程两边同乘  $u'$ , 并积分, 得到

$$(u'(t))^2 = 2F(u(t)), \quad t \geq 0.$$

应用分离变量法, 两边从 0 到  $t$  积分, 可得

[收稿日期] 2008-12-09; [修改日期] 2009-12-09

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(10671169); 山东省自然科学基金资助项目(2009ZRB01795)  
(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

$$\int_0^{u(t)} \frac{dv}{\sqrt{F(v)}} = \sqrt{2}t, \quad t > 0. \quad (3)$$

因此

$$u(t) = \varphi(\sqrt{2}t), \quad t > 0. \quad (4)$$

这里,  $\varphi$  表示

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\tau \frac{dv}{\sqrt{F(v)}}, \quad \tau \geq 0 \quad (5)$$

的反函数.

再求非负解. 对任意的  $c > 0$ , 设非负解  $u_c$  满足

$$u_c(t) \equiv 0, \quad t \in [0, c]; \quad u_c(t) > 0, \quad t > c; \quad u'_c(t) \equiv 0, \quad t \in [0, c],$$

同样可以证明,  $u_c$  在  $[c, \infty)$  是严格单调递增的. 方程两边同乘以  $u'_c$ , 并从  $c$  到  $t$  积分, 得到

$$(u'_c(t))^2 = 2F(u_c(t)), \quad t \geq c.$$

应用分离变量法, 并从  $c$  到  $t$  积分, 得到

$$\int_0^{u_c(t)} \frac{dv}{\sqrt{F(v)}} = \sqrt{2}(t-c), \quad t \geq c. \quad (6)$$

因此

$$u_c(t) = \varphi(\sqrt{2}(t-c)), \quad t \geq c. \quad (7)$$

即非负解是

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c, \\ \varphi(\sqrt{2}(t-c)), & t \geq c. \end{cases}$$

必要性. 反证 若  $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(s)}} = \infty$ . 既然问题(1)的解在  $[0, \infty)$  是单调递增的, 设  $u_1$  是问题(1)的任一非平凡解, 即存在  $t_1 \geq 0$ , 使得

$$u_1(t) \equiv 0, \quad t \in [0, t_1]; \quad u_1(t) > 0, \quad t > t_1; \quad u'_1(t) \equiv 0, \quad t \in [0, t_1].$$

同样, 可以证明,  $u_1$  在  $[t_1, \infty)$  是严格单调递增的. 方程两边同乘以  $u'_1$ , 并从  $t_1$  到  $t$  积分, 得到

$$(u'_1(t))^2 = 2F(u_1(t)), \quad t \geq t_1.$$

应用分离变量法, 方程两边从  $t_1 + \varepsilon$  到  $t$  积分, 得到

$$\int_{u_1(t_1+\varepsilon)}^{u_1(t)} \frac{dv}{\sqrt{F(v)}} = \sqrt{2}(t-t_1-\varepsilon), \quad t \geq t_1 + \varepsilon. \quad (8)$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 得到

$$\int_0^{u_1(t)} \frac{dv}{\sqrt{F(v)}} = \sqrt{2}t < \infty, \quad t > t_1. \quad (9)$$

与假设矛盾. 因此,  $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(s)}} < \infty$ .

## 2 几个基本例子

例 1 问题(1)中,  $f(u) = u^q$ ,  $u \geq 0$ ,  $0 < q < 1$ . 此时,

$$F(u) = \frac{u^{1+q}}{1+q}; \quad \Gamma(\tau) = \frac{2\sqrt{1+q}}{1-q} \tau^{(1-q)/2}, \quad \tau \geq 0; \quad \varphi(x) = \left( \frac{(1-q)^2}{2(1+q)} \right)^{1/(1-q)} x^{2/(1-q)}, \quad x \geq 0.$$

问题(1)的全部解是: 平凡解  $u \equiv 0$ , 正解

$$u(t) = \left( \frac{(1-q)^2}{2(1+q)} \right)^{1/(1-q)} t^{2/(1-q)}, \quad t \geq 0$$

和非负解 (对任意的  $c > 0$ ).

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c, \\ \left( \frac{(1-q)^2}{2(1+q)} \right)^{1/(1-q)} (t-c)^{2/(1-q)}, & t \geq c. \end{cases}$$

此外,还可以应用待定常数法求例 1 的正解.事实上,设  $u = mt^\alpha$  是该问题的正解,其中  $m > 0$ ,  $\alpha \geq 2$  是待定常数.代入可得

$$m\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} = m^q t^{q\alpha}.$$

因此

$$\alpha - 2 = q\alpha, \quad m\alpha(\alpha-1) = m^q,$$

即

$$\alpha = \frac{2}{1-q}, \quad m = \left( \frac{(1-q)^2}{2(1+q)} \right)^{1/(1-q)}.$$

这样得到了  $u = mt^\alpha$  是该问题的正解.

例 2 问题(1)中,

$$f(u) = 2(u+1)(\ln(u+1))^{2q} + 2q(u+1)(\ln(u+1))^{2q-1}, \quad u \geq 0, \quad \frac{1}{2} \leq q < 1.$$

此时,

$$F(u) = ((u+1)(\ln(u+1))^q)^2; \quad \Gamma(\tau) = (1-q)^{-1}(\ln(\tau+1))^{1-q}, \quad \tau \geq 0;$$

$$\varphi(x) = e^{((1-q)x)^{1/(1-q)}} - 1, \quad x \geq 0.$$

问题(1)的全部解是:平凡解  $u \equiv 0$ , 正解

$$u(t) = e^{((1-q)\sqrt{2}t)^{1/(1-q)}} - 1, \quad t \geq 0$$

和非负解(对任意的  $c > 0$ )

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c, \\ e^{((1-q)\sqrt{2}(t-c))^{1/(1-q)}} - 1, & t \geq c. \end{cases}$$

### [参 考 文 献]

- [1] Walter W. Ordinary differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.  
 [2] 丁同仁. 常微分方程定性方法的应用[M]. 北京:高等教育出版社, 2004.  
 [3] 丁同仁,李承治. 常微分方程教程[M]. 北京:高等教育出版社, 1991.

## Infinitely Many Solutions to a Class of Initial Value Problems for a Second Order Differential Equations

WANG Hai-ling, ZHANG Zhi-jun

(School of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Yantai, Shandong 264005, China)

**Abstract:** By the separated variable method, we derive a sufficient and necessary condition for the existence of infinitely many solutions to a class of initial value problems for a second order differential equations, and give all the infinitely many solutions.

**Key words:** second order differential equations; initial value problems; infinitely many solutions

主 编: 苏化明

副 主 编: 潘 杰

编辑部主任: 周 玲

\*

**Chief Editor:** SU Hua-ming

**Deputy Chief Editor:** PAN Jie

**Chairman of Editorial Board:** ZHOU Ling

## 大学数学

(双月刊·1984年创刊)

2011年第27卷第6期

(总第156期)

\*

College Mathematics

Vol.27, No.6, Dec.2011

(General Serial No.156)

(Bimonthly, Started Publication in 1984)

---

主 管: 教育部

主 办: 教育部数学与统计学教学指导委员会  
高等教育出版社  
合肥工业大学

编 辑: 《大学数学》杂志编辑部

出版发行: 大学数学杂志社

地 址: 合肥市屯溪路193号

激光照排: 合肥劲松激光照排社

印 刷: 合肥市杏花印务股份有限公司

定 价: 15.00元

---

国际标准刊号: ISSN 1672-1454

国内统一刊号: CN 34-1221/O1