2011 6

大学数学

College Mathematics

第二十七卷 VOL.27

Daxue Shuxue

ISSN 1672-1454

12>

9 771672 145009

大 学 数 学

2011 年 12 月　　　　第 27 卷　第 6 期(总第 156 期)

目　　录

教学改革

专题研究

计算机辅助教学

[期刊基本参数] CN 34－1221/O1 * 1984 * b * A4 * 208 * zh＋en * P * ￥15.00 * 1200 * 48 * 2011－12

本期责任编辑：禹春福，涂振坤，周　玲

第 27 卷第 6 期　　大　学　数　学　　Vol. 27, №. 6
2011 年 12 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Dec. 2011

一类二阶常微分方程初值问题的无穷多解性

王海玲，　张志军
（烟台大学 数学与信息科学学院，山东 烟台 264005）

［摘　要］应用分离变量法，得到了一类二阶微分方程初值问题存在无穷多个非负解的充分必要条件，并给出了所有的无穷多个非负解.

［关键词］二阶非线性微分方程；初值问题；无穷多解

［中图分类号］O172.1　　［文献标识码］A　　［文章编号］1672-1454(2011)06-0085-03

本文应用分离变量法，得到了一类二阶非线性微分方程初值问题

$$u''(t)=f(u(t)),\quad t>0,\quad u(0)=u'(0)=0 \tag{1}$$

的所有无穷多个非负解.

该问题是二阶非线性微分方程的基本问题，见文献[1－3].

本文的结果是：

定理 1.1　设 f 满足

$$\text{(f1)}\quad f\in C[0,\infty),\quad f(0)=0,\quad f(s)>0,\quad \forall s>0,$$

则问题(1)存在无穷多个非负解的充分必要条件是 f 满足

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{F(s)}}<\infty, \tag{2}$$

其中 $F(s)=\int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau,\ s\geqslant 0$.

注 1　问题（2）的解属于 $C^2[0,\infty)$.

注 2　这时出现了微分方程界非常有名的现象：在平凡解和正解围成的区域中任取一点，都有问题(1)的解经过该点，即解充满了该区域.

1　定理的证明

证　明显地，$u\equiv 0$ 是平凡解.

充分性. 先求解正解(即当 $t>0$ 时，$u(t)>0$). 由 u'的单调递增性，结合 $u'(0)=0$ 可知，问题(1)的解都是单调递增的. 我们先证正解 u 在$[0,\infty)$是严格单调递增的. 反证法. 若存在 $t_2>t_1>0$ 使得 $u(t_1)=u(t_2)$，则 $u(t)\equiv u(t_1)>0, \forall t\in[t_1,t_2]$. 由($f1$)可知，此时，$u$ 在$[t_1,t_2]$不满足方程. 矛盾. 因此，正解 u 在$[0,\infty)$是严格单调递增的. 方程两边同乘 u'，并积分，得到

$$(u'(t))^2=2F(u(t)),\quad t\geqslant 0.$$

应用分离变量法，两边从 0 到 t 积分，可得

［收稿日期］2008-12-09；［修改日期］2009-12-09
［基金项目］国家自然科学基金资助项目(10671169)；山东省自然科学基金资助项目(2009ZRB01795)

$$\int_0^{u(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{F(v)}}=\sqrt{2}t,\quad t>0. \tag{3}$$

因此

$$u(t)=\varphi(\sqrt{2}t),\quad t>0. \tag{4}$$

这里,φ 表示

$$\Gamma(\tau)=\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{F(v)}},\quad \tau\geqslant 0 \tag{5}$$

的反函数.

再求非负解. 对任意的 $c>0$,设非负解 u_c 满足

$$u_c(t)\equiv 0,\quad t\in[0,c];\quad u_c(t)>0,\quad t>c;\quad u_c'(t)\equiv 0,\quad t\in[0,c],$$

同样可以证明,u_c 在$[c,\infty)$是严格单调递增的. 方程两边同乘以 u_c',并从 c 到 t 积分,得到

$$(u_c'(t))^2=2F(u_c(t)),\quad t\geqslant c.$$

应用分离变量法,并从 c 到 t 积分,得到

$$\int_0^{u_c(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{F(v)}}=\sqrt{2}(t-c),\quad t\geqslant c. \tag{6}$$

因此

$$u_c(t)=\varphi(\sqrt{2}(t-c)),\quad t\geqslant c. \tag{7}$$

即非负解是

$$u_c(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant c,\\ \varphi(\sqrt{2}(t-c)), & t\geqslant c.\end{cases}$$

必要性. 反证 若 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{F(s)}}=\infty$. 既然问题(1)的解在$[0,\infty)$是单调递增的,设 u_1 是问题(1)的任一非平凡解,即存在 $t_1\geqslant 0$,使得

$$u_1(t)\equiv 0,\quad t\in[0,t_1];\quad u_1(t)>0,\quad t>t_1;\quad u_c'(t)\equiv 0,\quad t\in[0,t_1].$$

同样,可以证明,u_1 在$[t_1,\infty)$是严格单调递增的. 方程两边同乘以 u_1',并从 t_1 到 t 积分,得到

$$(u_1'(t))^2=2F(u_1(t)),\quad t\geqslant t_1.$$

应用分离变量法,方程两边从 $t_1+\varepsilon$ 到 t 积分,得到

$$\int_{u_1(t_1+\varepsilon)}^{u_1(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{F(v)}}=\sqrt{2}(t-t_1-\varepsilon),\quad t\geqslant t_1+\varepsilon. \tag{8}$$

令 $\varepsilon\to 0$,得到

$$\int_0^{u_1(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{F(v)}}=\sqrt{2}t<\infty,\quad t>t_1. \tag{9}$$

与假设矛盾. 因此,$\int_0^1\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{F(s)}}<\infty$.

2 几个基本例子

例 1 问题(1)中,$f(u)=u^q$,$u\geqslant 0$,$0<q<1$. 此时,

$$F(u)=\frac{u^{1+q}}{1+q};\quad \Gamma(\tau)=\frac{2\sqrt{1+q}}{1-q}\tau^{(1-q)/2},\quad \tau\geqslant 0;\quad \varphi(x)=\left(\frac{(1-q)^2}{2(1+q)}\right)^{1/(1-q)}x^{2/(1-q)},\quad x\geqslant 0.$$

问题(1)的全部解是:平凡解 $u\equiv 0$,正解

$$u(t)=\left(\frac{(1-q)^2}{2(1+q)}\right)^{1/(1-q)}t^{2/(1-q)},\quad t\geqslant 0$$

和非负解(对任意的 $c>0$)

$$u_c(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant c,\\ \left(\dfrac{(1-q)^2}{2(1+q)}\right)^{1/(1-q)}(t-c)^{2/(1-q)}, & t\geqslant c.\end{cases}$$

此外,还可以应用待定常数法求例 1 的正解. 事实上,设 $u=mt^{\alpha}$ 是该问题的正解,其中 $m>0$,$\alpha\geqslant 2$ 是待定常数. 代入可得

$$m\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}=m^q t^{q\alpha}.$$

因此

$$\alpha-2=q\alpha,\quad m\alpha(\alpha-1)=m^q,$$

即

$$\alpha=\frac{2}{1-q},\qquad m=\left(\frac{(1-q)^2}{2(1+q)}\right)^{1/(1-q)}.$$

这样得到了 $u=mt^{\alpha}$ 是该问题的正解.

例 2 问题(1)中,

$$f(u)=2(u+1)(\ln(u+1))^{2q}+2q(u+1)(\ln(u+1))^{2q-1},\qquad u\geqslant 0,\qquad \frac{1}{2}\leqslant q<1.$$

此时,

$$F(u)=((u+1)(\ln(u+1))^q)^2;\quad \Gamma(\tau)=(1-q)^{-1}(\ln(\tau+1))^{1-q},\quad \tau\geqslant 0;$$
$$\varphi(x)=e^{((1-q)x)^{1/(1-q)}}-1,\quad x\geqslant 0.$$

问题(1)的全部解是:平凡解 $u\equiv 0$,正解

$$u(t)=e^{((1-q)\sqrt{2}t)^{1/(1-q)}}-1,\quad t\geqslant 0$$

和非负解(对任意的 $c>0$)

$$u_c(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant c,\\ e^{((1-q)\sqrt{2}(t-c))^{1/(1-q)}}-1, & t\geqslant c.\end{cases}$$

[参 考 文 献]

[1] Walter W. Ordinary differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[2] 丁同仁. 常微分方程定性方法的应用[M]. 北京:高等教育出版社, 2004.

[3] 丁同仁,李承治. 常微分方程教程[M]. 北京:高等教育出版社, 1991.

Infinitely Many Solutions to a Class of Initial Value Problems for a Second Order Differential Equations

WANG Hai-ling, *ZHANG Zhi-jun*

(School of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Yantai, Shandong 264005, China)

Abstract: By the separated variable method, we derive a sufficient and necessary condition for the existence of infinitely many solutions to a class of initial value problems for a second order differential equations, and give all the infinitely many solutions.

Key words: second order differential equations; initial value problems; infinitely many solutions

大学数学
（双月刊·1984年创刊）
2011年第27卷第6期
（总第156期）
*
College Mathematics
Vol.27, No.6, Dec.2011
(General Serial No.156)
(Bimonthly, Started Publication in 1984)

主　　管：教育部
主　　办：教育部数学与统计学教学指导委员会
　　　　　高等教育出版社
　　　　　合肥工业大学
编　　辑：《大学数学》杂志编辑部
出版发行：大学数学杂志社
地　　址：合肥市屯溪路193号
激光照排：合肥劲松激光照排社
印　　刷：合肥市杏花印务股份有限公司
定　　价：15.00元

国际标准刊号：**ISSN** 1672-1454
国内统一刊号：**CN** 34-1221/O1