

ISSN 1008-1399  
CN61-1315/O1

- 国家自然科学基金委员会数学天元基金支持刊物
- 《中国期刊网》、《中国学术期刊》(光盘版)全文收录期刊
- 《中国学术期刊综合评价数据库》来源期刊
- 《万方数据-数字化期刊群》、《中文科技期刊数据库》全文收录期刊
- 《中国核心期刊(遴选)数据库》收录期刊
- 《CEPS思博网-中文电子期刊服务》收录期刊
- 《中国数学文摘》、《中国数学文献数据库》收录期刊
- 2000年获“陕西省优秀科技期刊一等奖”
- 国家新闻出版广电总局第一批认定学术期刊

# 高等数学研究

陳育身題

GAODENG SHUXUE YANJIU  
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS



ISSN 1008-1399



# 2017 1

第20卷第1期 (总第177期)

2017年1月出版

西北工业大学 陕西省数学会 主办

第20卷第1期  
(总第177期)  
2017年1月出版  
(1954年创刊)  
国内外公开发行

主管: 陕西省科学技术协会  
主办: 西北工业大学 陕西省数学会

编委会主编: 崔俊芝  
副主编: 徐伟  
常务编委: (按姓氏笔画为序)  
王国正 王金金 刘三阳 陆全  
林伟 赵小艳 赵彦晖 聂玉峰  
徐伟 徐文雄 崔俊芝

名誉顾问: 张肇炽

编辑部  
主任: 徐伟  
常务副主任: 林伟  
成员: 徐伟 林伟 王群  
吴志坚(美) 童增祥(美)

编辑出版: 高等数学研究编辑部  
地址: 西安市西北工业大学  
邮编: 710072  
电话/传真: 86-29-88491574  
投稿邮箱: gdsxyj@yeah.net  
gdsxyj@nwpu.edu.cn  
业务信箱: gdsxyj@126.com

印刷装订: 西安昆明印刷厂  
邮发代号: 52-192  
国外代号: BM2987  
国内总发行: 中国邮政集团公司  
陕西省报刊发行局  
国外总发行: 中国国际图书贸易总公司  
ISSN 1008-1399  
CN 61-1315/O1

国内定价: ¥15.00 元  
国外定价: \$ 15.00 元

## 目次

|  |                         |
|--|-------------------------|
| <b>专题研究</b>                                |                         |
| 伽马函数余元公式的证明 .....                          | 楼红卫 (001)               |
| 二元 Burr III型分布的识别性和渐近独立性 .....             | 李国安, 李卫华 (005)          |
| 马王堆帛书周易卦序的数学建构 .....                       | 罗见今 (008)               |
| <b>交流与探讨</b>                               |                         |
| 一类三对角矩阵的特征值和特征向量的研究 .....                  | 鲍四元 (013)               |
| 积分型余项的泰勒公式与分数阶导数 .....                     | 袁占斌, 王俊刚, 聂玉峰, 孙浩 (016) |
| 一类二重极限的存在性探讨 .....                         | 刘颖, 陈逸藻 (019)           |
| 关于预不变凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式的一个注记 ..... | 时统业, 李鼎, 朱瑞 (023)       |
| 关于发散的 $p$ -级数的一个发散速度估计 .....               | 王海玲, 张志军 (028)          |
| 最短距离与费马点 .....                             | 孙世良 (030)               |
| <b>推广与应用</b>                               |                         |
| 无穷级数中高斯判别法的进一步讨论 .....                     | 李光亮 (032)               |
| 从微积分的观点看高阶等差数列的求和 .....                    | 林开亮 (034)               |
| 关于泰勒公式及其应用的再认识 .....                       | 陈刚, 杨雪, 杨利红 (038)       |
| 以线性代数观点看常用多项式插值方法 .....                    | 龚佃选, 刘春风 (042)          |
| 正交投影及其在几何上的应用 .....                        | 唐玉超, 蔡用 (046)           |
| 拉格朗日估和公式及其应用 .....                         | 薛凌霄, 李德新, 陈日清 (050)     |
| 级数加括号判敛方法的一点思考 .....                       | 柴华岳, 朱佑彬, 刘三阳 (053)     |
| 一类二重积分的解法剖析及其推广 .....                      | 王灯山, 闻小永, 马余全 (055)     |
| <b>方法与技巧</b>                               |                         |
| 一般的高阶线性差分方程的求解研究 .....                     | 李绍刚 (058)               |
| 积分式的概率意义在概率统计教学中的应用 .....                  | 刘旭华 (061)               |
| 数列的无穷求和 .....                              | 杨洁, 邱为钢 (064)           |
| 基于正态分布求解两类反常积分 .....                       | 张春春, 涂俐兰 (066)          |
| 一元隐函数取极值的一般充分条件 .....                      | 郎开禄 (069)               |
| 一类重积分的新算法 .....                            | 朱建华, 张博文, 孟新柱 (072)     |
| 借助于复变函数解析函数求一些三角级数的和 .....                 | 胡绍宗 (076)               |
| 线性方程组解的存在定理的应用 .....                       | 彭司萍, 龙正平 (079)          |
| 对一道研究生入学试题的两种解答 .....                      | 孟凡友, 王冰, 白万军, 金俊 (082)  |
| <b>模型与仿真</b>                               |                         |
| 两种液体交叉混合的建模问题 .....                        | 白慧, 詹雨 (085)            |
| <b>辅导篇</b>                                 |                         |
| 工科复变函数中一道作业题不同解法的讨论 .....                  | 李景和 (089)               |
| 一类古典概率问题的解法探究 .....                        | 朱庆峰, 王煜 (092)           |
| 一道全国大学生数学竞赛题的五种解法及其推广 .....                | 陈现平 (094)               |
| 积分运算中的对称性 .....                            | 朱红宝 (096)               |
| 对称性在积分计算中的应用 .....                         | 马志辉 (102)               |
| <b>学生园地</b>                                |                         |
| 论纯量多重积与克莱默法则 .....                         | 文白白 (106)               |
| 用向量的线性分解理解函数的展开 .....                      | 杜东阳, 李婷 (108)           |
| <b>教学随议</b>                                |                         |
| 高校“微课”教学设计促进教学效果策略研究 .....                 | 李晓艳, 田丽娜 (111)          |
| 关于中心极限定理教学中的几点补充说明 .....                   | 王红军, 杨有龙 (115)          |
| 在《概率论与数理统计》教学实践中反思《高等数学》教学 .....           | 滕吉红, 鲁志波, 黄晓英 (117)     |
| 概率统计实验实践教学案例——生日问题 .....                   | 徐付霞, 常虹 (121)           |
| 中英高校几何课程教学比较 .....                         | 方金辉, 王智勇 (124)          |
| <b>简讯</b>                                  |                         |
| 数学能力高低并非是先天决定 .....                        | (027)                   |
| 2016年“邵逸夫奖”颁奖 .....                        | (031)                   |
| 2016年度国家自然科学基金数学类奖项 .....                  | (110)                   |
| 第13届国际数学教育大会 .....                         | (126)                   |

# STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 20 No. 1 (Serial No. 177) Jan. 2017

## CONTENTS

|  |   |       |
|--|---|-------|
| Elementary Proofs of Reflection Formula for Gamma Function .....   | LOU Hongwei                                     | (001) |
| Identifiability and Asymptotically Independence of the Bivariate Burr Type III Distribution .....                              | LI Guoan, LI Weihua                             | (005) |
| On the Mathematical Structure of the Hexagram Order in the <i>Silk Book</i> Zhou Yi of the Mawangdui Tomb in Han Dynasty ..... |   |       |
| .....  | LUO Jianjin                                     | (008) |
| On Eigenvalues and Eigenvectors of Tridiagonal Matrices .....  | BAO Siyuan                                      | (013) |
| Taylor Formula with Integral Remainder and Fractional Derivatives .....  | YUAN Zhanbin, WANG Jungang, NIE Yufeng, SUN Hao | (016) |
| Existence of a Class of Double Limits .....  | LIU Ying, CHEN Yizao                            | (019) |
| A Remark on Hermite-Hadamard Type Inequality for Preinvex Convex Functions .....   | SHI Tongye, LI Ding, ZHU Jing                   | (023) |
| Rate of Divergence of Divergent $p$ -series .....  | WANG Hailing, ZHANG Zhijun                      | (028) |
| Shortest Distance and Fermat Point .....   | SUN Shiliang                                    | (030) |
| Further Discussion of Gauss's Test for Infinite Series .....   | LI Guangliang                                   | (032) |
| Summation of Arithmetic Progression of Higher Order in View of Calculus .....  | LIN Kailiang                                    | (034) |
| Further Understanding of Taylor Formula and Its Applications .....   | CHEN Gang, YANG Xue, YANG Lihong                | (038) |
| Polynomial Interpolation in View of Linear Algebra .....   | GONG Dianxuan, LIU Chunfeng                     | (042) |
| Orthogonal Projection and Its Application in Geometry .....  | Tang Yuchao, Cai Yong                           | (046) |
| Lagrange Estimation Formula and Its Application .....  | XUE Lingxiao, LI Dexin, CHEN Riqing             | (050) |
| Some Ideas about Convergence of Series by Regrouping .....   | CHAI Huayue, ZHU Youbin, LIU Sanyang            | (053) |
| Evaluation of a Type of Double Integrals and its Extension .....   | WANG Dengshan, WEN Xiaoyong, MA Yuquan          | (055) |
| Research on Solution for Higher Order Linear Differential Equation .....   | LI Shaogang                                     | (058) |
| Applying Probability Interpretation of Some Integral Formulas in Teaching Probability and Statistics .....                     | LIU Xuhua                                       | (061) |
| Sums of Infinite Sequences .....   | Yang Jie, Qiu Weigang                           | (064) |
| Evaluation of Two Types of Improper Integrals via Normal Distribution .....  | ZHANG Chunchun, TU Lilan                        | (066) |
| Sufficient Conditions of Extrema of Implicit One-Variable Functions .....  | LANG Kailu                                      | (069) |
| A New Method for Evaluating a Class of Multiple Integrals .....  | ZHU Jianhua, ZHANG Bowen, MENG Xinzhu           | (072) |
| Sum of Some Trigonometric Series in Terms of Analytic Functions .....  | Hu Shaozong                                     | (076) |
| Application of Existence Theorem of Solution for Linear Equations .....  | PENG Siping, LONG Zhengping                     | (079) |
| Two Ways for Solving a Postgraduate Entrance Exam Problem .....  | MENG Fanyou, WANG Bing, BAI Wanjun, JIN Jun     | (082) |
| Modeling Cross-mixing Processes of Two Liquids .....   | BAI Hui, ZHAN Yu                                | (085) |
| On Different Approaches of an Exercise in Engineering Complex Functions .....  | LI Jinghe                                       | (089) |
| On a Kind of Classical Probability Problems .....  | ZHU Qingfeng, WANG Yu                           | (092) |
| Five Approaches to a Problem of National College Students' Mathematical Competition .....                                      | CHENG Xianping                                  | (094) |
| Symmetry of Integral Operation .....   | ZHU Hongbao                                     | (096) |
| Application of Symmetry in Calculating Integrals .....   | MA Zhihui                                       | (102) |
| About Scalar Multiple Product and Cramer's Rule .....  | WEN Baibai                                      | (106) |
| Understanding Expansion of a Function through Linear Decomposition of a Vector .....   | DU Dongyang, LI Ting                            | (108) |
| On Promotion of Teaching Strategies Using Micro-Teaching Design in Higher Education .....                                      | LI Xiaoyan, TIAN Lina                           | (111) |
| Some Illustrations on Teaching Central Limit Theorems .....  | WANG Hongjun, Yang Youlong                      | (115) |
| Reflection on Teaching of "Higher Mathematics" and "Probability and Statistics" .....  | TENG Jihong, LU Zhibo, HUANG Xiaoying           | (117) |
| An Example of the Birthday Problem on Teaching of Experimental Practice of Probability and Mathematical Statistics .....       |   |       |
| .....  | XU Fuxia, CHANG Hong                            | (121) |
| A Comparative Study of Geometry in Universities between China and UK .....   | FANG Jinhui, WANG Zhiyong                       | (124) |

doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2017.01.008

# 关于发散的 $p$ -级数的一个发散速度估计

王海玲, 张志军

(烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

**摘要** 设  $p \in (0, 1)$ , 本文研究  $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$  的发散速度估计. 通过构造适当的区间套, 得到了  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{n,p} := C_p \in (p, 2^{1-p} - 1 + p)$ ,  $0 < C_p - A_{n,p} < (1-p)n^{-p}$ , 这里,  $A_{n,p} = n^{1-p} - (1-p) \sum_{k=1}^{k=n} k^{-p}$ . 进一步, 应用数值积分的梯形公式, 得到了  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p (C_p - A_{n,p}) = (1-p)/2$  以及  $C_p - A_{n,p}$  的二次估计. 所得结果改进了文(马书燮, 关于发散  $p$ -级数的一个不等式[J]. 大学数学, 2013, 29 (2): 147-150.) 中的结果.

**关键词** 无穷级数; 发散的  $p$ -级数; 发散速度估计

中图分类号 O122.7 文献标识码 A 文章编号 1008-1399(2017)01-0028-02

## Rate of Divergence of Divergent $p$ -series

WANG Hailing, ZHANG Zhijun

(School of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Yantai 264005, PRC)

**Abstract** In this paper we estimate the rate of divergence of the  $p$ -series  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ ,  $p \in (0, 1)$ . We obtain that  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{n,p} := C_p \in (p, 2^{1-p} - 1 + p)$  and  $0 < C_p - A_{n,p} < (1-p)n^{-p}$ , by constructing an appropriate nested intervals. Here  $A_{n,p} = n^{1-p} - (1-p) \sum_{k=1}^{k=n} k^{-p}$ . Moreover, the equality  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p (C_p - A_{n,p}) = (1-p)/2$  and a second order estimate of  $C_p - A_{n,p}$  are obtained by using the trapezoid formula of the numerical integration. Our results improve those in[2].

**Keywords** infinite series, divergent  $p$ -series, rate of divergence

我们知道, 调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$  发散速度的一个基本估计就是[1]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n k^{-1} - \ln n \right) = \gamma, \quad (1)$$

这里,  $\gamma$  就是通常的欧拉常数.

最近, 关于发散的  $p$ -级数, 文[2]得到了类似的如下结果:

**引理 1.1** 设  $p \in (0, 1)$ . 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{1-p} - (1-p) \sum_{k=1}^{k=n} k^{-p} \right) = C_p \in (p, 1).$$

(2)

该结果很有意义.

为方便起见, 记

$$A_{n,p} = n^{1-p} - (1-p) \sum_{k=1}^{k=n} k^{-p}. \quad (3)$$

本文的结果是:

收稿日期: 2013-11-13 修改日期: 2014-03-30

基金项目: 国家自然科学基金(11571295)

作者简介: 王海玲(1973-), 女, 山东烟台人, 硕士, 讲师, 主要从事

微分方程研究, Email: 527984494@qq.com.

张志军(1963-), 男, 陕西乾县人, 博士, 教授, 主要从事

非线性分析研究, Email: zhangzj@ytu.edu.cn.

定理 1.1 设  $p \in (0, 1)$ . 则

$$(I) \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n,p} = C_p \in (p, 2^{1-p} - 1 + p);$$

$$(II) \text{对任意的自然数 } n, 0 < C_p - A_{n,p} < (1-p)n^{-p};$$

(III) 对任意的自然数  $n$ ,

$$C_p - A_{n,p} = (1-p) \left( \frac{1}{2} n^{-p} - \frac{1}{12} p(p+1) \sum_{k=n}^{\infty} \zeta_k^{-p-2} \right),$$

这里,  $\zeta_k \in (k, k+1)$ ;

$$(IV) \lim_{n \rightarrow \infty} n^p (C_p - A_{n,p}) = \frac{1-p}{2}.$$

注 函数  $g(x) = 2^{1-x} - 1 + x$  在  $[0, 1]$  具有性质:  $g(0) = g(1) = 1$ , 对任意的  $x \in (0, 1)$ ,  $g(x) < 1$ ;  $g$  在  $[0, x_0]$  严格单调递减, 而在  $[x_0, 1]$  严格单调递增. 这里  $x_0 = \frac{\ln(2\ln 2)}{\ln 2} \in (0, 1)$ .

证明 令

$$B_{n,p} = (n+1)^{1-p} - (1-p) \sum_{k=1}^{k=n} k^{-p}. \quad (4)$$

明显地, 对任意的自然数  $n$ ,

$$A_{n,p} < B_{n,p}. \quad (5)$$

而且, 由牛顿-莱布尼兹公式可得

$$B_{n+1,p} - B_{n,p} = (n+2)^{1-p} - (n+1)^{1-p} - (1-p)(n+1)^{-p} =$$

$$\int_{n+1}^{n+2} (x^{1-p})' dx - (1-p)(n+1)^{-p} =$$

$$(1-p) \int_{n+1}^{n+2} (x^{-p} - (n+1)^{-p}) dx < 0.$$

同理, 成立

$$A_{n+1,p} - A_{n,p} = (n+1)^{1-p} - n^{1-p} - (1-p)(n+1)^{-p} =$$

$$(1-p) \int_n^{n+1} (x^{-p} - (n+1)^{-p}) dx > 0,$$

且

$$B_{n,p} - A_{n,p} = (n+1)^{1-p} - n^{1-p} =$$

$$(1-p) \int_n^{n+1} x^{-p} dx < (1-p)n^{-p}. \quad (6)$$

因此, 数列  $\{A_{n,p}\}$  严格单调递增, 数列  $\{B_{n,p}\}$

严格单调递减. 且由 (5) 和 (6) 可知, 数列  $\{A_{n,p}\}$  和  $\{B_{n,p}\}$  收敛到同一极限  $C_p$ . 而且,  $C_p$  满足

$$p = A_{1,p} < A_{2,p} < \dots < A_{n,p} < C_p < B_{n,p} < \dots < B_{2,p} < B_{1,p} = 2^{1-p} - 1 + p. \quad (7)$$

从此,

$$0 < C_p - A_{n,p} < B_{n,p} - A_{n,p} < (1-p)n^{-p}.$$

进一步, 应用数值积分的梯形公式[3], 可得

$$\int_k^{k+1} (x^{-p} - (n+1)^{-p}) dx =$$

$$\frac{1}{2} (k^{-p} - (k+1)^{-p}) - \frac{1}{12} p(p+1) \zeta_k^{-p-2},$$

这里,  $\zeta_k \in (k, k+1)$ .

从而, 成立

$$C_p - A_{n,p} = \sum_{k=n}^{\infty} (A_{k+1,p} - A_{k,p}) = (1-p) \left( \frac{1}{2} n^{-p} - \frac{1}{12} p(p+1) \sum_{k=n}^{\infty} \zeta_k^{-p-2} \right).$$

同时, 注意到, 当  $n \geq 2$  时, 成立

$$\frac{1}{p+1} (n+1)^{-p-1} = \int_{n+1}^{\infty} x^{-p-2} dx =$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \int_{k+1}^{k+2} x^{-p-2} dx < \sum_{k=n}^{\infty} \zeta_k^{-p-2} <$$

$$\int_{n-1}^{\infty} x^{-p-2} dx =$$

$$\frac{1}{p+1} (n-1)^{-p-1}.$$

这样立即得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p (C_p - A_{n,p}) = \frac{1-p}{2}.$$

证毕.

### 参考文献

- [1] 张志军. 数学分析中的一些新思想与新方法[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1998: 1-32.
- [2] 马书燮. 关于发散  $p$ -级数的一个不等式[J]. 大学数学. 2013, 29(2): 147-150.
- [3] 王烈衡. 几个数值积分公式的积分型余项[J]. 数学的实践与认识, 1990, (03): 23-281.

# 热忱欢迎订阅2017年《高等数学研究》

高校、科研院所图书馆、资料室必备参考资料，数学教师科研、教学的得力助手，大学生学习数学的良师益友

《高等数学研究》是西北工业大学和陕西省数学会联合主办的以高校教师、大学生和科技工作者为主要的服务对象、国内外公开发行的数学期刊，是1950年初期我国创办的几份数学杂志之一，2014年国家新闻出版广电总局第一批认定的学术期刊。多年来，刊物深受读者喜爱，得到了关心数学教育的众多数学家、数学教育家、广大数学教育工作者的关心和支持，在此谨向热情关爱支持本刊的专家、学者和广大作者、读者表示衷心的感谢和敬意！

本刊为双月刊，A4开本，单月月底出版。2017年第2,3,5,6期各64页，定价7.5元；第1,4期各128页，定价15元。全年6期总定价60元。一、二年级大学生读者，可以只订阅其中与高等数学、线性代数、概率统计课程内容密切相关的4期，第2,3,5,6期，共价30元。

订阅方式：

(1) 可以在全国各地邮局订阅，邮发代号：52-192。

(2) 直接汇款至本刊编辑部订阅。

近若干年的部分期刊尚有少量存量，如有需要可直接与编辑部联系购买（含邮购）。

## Studies in College Mathematics

(Bimonthly, Started in 1954)

Vol.20, No.1 (Serial No.177), Jan. 2017

Sponsored by Northwestern Polytechnical University and Shaanxi Mathematical Society

Edited and published by Editorial Board of Studies in College Mathematics

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, PRC)

Editor-in-Chief CUI Junzhi

Printed by Xi'an Kurming Printing House

Distributed by China International Book Trading Corporation

(P. O. Box 399, Beijing 100044, PRC)

CN 61-1315/O1/ISSN1008-1399

投稿专用信箱：[gdsxyj@yeah.net](mailto:gdsxyj@yeah.net)

邮发代号：52-192

国内定价：15.00元