

# 数学的实践与认识

MATHEMATICS

IN PRACTICE AND THEORY

第五十一卷

Vol. 51

第5期

No. 5

**2021**

中国数学会会刊

中国科学院数学与系统科学研究院主办

科学出版社出版

# 数学的实践与认识

2021 年第 51 卷第 5 期

## 目 次

### 管理科学

- 基于 Lasso+SVM 的制造业上市公司财务风险组合预警模型····· 张春梅, 赵明清, 官俊琪 (1)
- 基于 Shapley Value-CCR 我国各省煤炭利用效率及其影响因素分析·····  
····· 刘雨佳, 付应雄, 陈维国, 付辉敬, 于瑛英 (13)
- 工业互联网环境下预防性维修管理多目标协同优化····· 周元高, 曾祥君, 金维宇, 何运娟 (27)
- 半参数门限广义非对称随机波动模型研究····· 梁秋阳, 陈家清, 王仁祥 (36)
- CEV 模型下家庭最优投资决策问题····· 周双龙, 王爱银 (45)
- 基于 PCA-GM-BP 神经网络的猪肉价格预测分析····· 李 阳, 王晓光 (56)
- 基于演化博弈论的装配式建筑创新激励政策研究····· 薛 渊, 彭 盈 (64)
- 棉花双关税后进口价格、期货价格与现货价格的感知及传导研究——基于 VAR 模型·····  
····· 吴志旻, 王 力, 吴庆君, 王 博 (74)
- 基于犹豫模糊集的 CMMI 过程评估方法研究····· 赵 娟 (85)
- 市场需求下产学研协同创新意愿的动态收益分配优化模型····· 李文华, 唐厚兴 (93)
- 基于云模型的自动化工装装配失效风险评估····· 杨承诚, 王 婷, 莫 姝 (103)

### 应 用

- 考虑非结构性的多级生产流程调度方法····· 廖建国, 张圣忠 (114)
- 基于数值分析的动水效应对连续刚构桥抗震性能影响····· 黄 雯, 加攀星, 左光升, 张秀成 (123)
- 具有分布时滞和捕食者非密度制约的捕食-食饵系统的动力学行为研究·····  
····· 阿卜杜杰力力·阿卜杜热合曼, 艾合麦提·麦麦提阿吉 (131)
- 双边定时截尾样本下广义逆指数分布形状参数的估计····· 刘 华 (138)
- 融合改进 Tent 混沌和模拟退火的灰狼算法····· 毛清华, 杨 林, 王艳亮 (147)
- 具有工作故障及有限容量的 MAP/M/1 排队系统性能分析····· 张晓亮, 叶晴晴, 庞钰滢 (162)
- 基于聚类分析的数量差异较大决策单元 DEA 有效性评价····· 张雪怡, 马生昀, 马占新, 黄沙日娜 (169)
- 正态云模型果蝇优化算法及其应用····· 邢海霞, 石建平, 索明何, 周章渝, 代天军, 陈冬云, 陶婉菊 (177)

### 研 究

- 时间分数阶扩散方程的一个新的高阶有限差分/谱逼近····· 曹俊英, 张旭梅, 杨 训, 王自强 (188)
- 有界域上局部与全局的 Radon 测度的积分不等式····· 李群芳, 李华灿 (196)
- 关于 6 维近凯勒流形中二阶平行拉格朗日子流形的注记····· 焦慧平, 徐自立 (203)
- 结构化变精度粗糙集····· 万仁霞, 张海娣, 苗夺谦 (208)
- 超混沌分数阶 Bao 系统的自适应滑模同步控制····· 张 伟, 毛北行 (214)
- 带约束条件集值优化问题近似 Henig 有效解集的连通性····· 吴昌耀, 陈剑尘 (221)
- 基于自适应模糊控制方法的四翼混沌系统有限时间同步····· 林福宁, 薛广明, 粟光旺, 张晶华 (228)
- 一类分数阶 p-Laplacian 具积分边界的多点边值问题····· 王和香 (238)
- 关于滑动相对熵的若干极限性质····· 任园园, 汪忠志 (244)

### 教学研究

- 双菌体发酵过程的动力学模型研究····· 郑立飞, 于 杰, 秦宝福 (250)
- 基于改进灰色 GM(1,1) 模型的新疆人口总量的分析与预测····· 田梓辰, 吉 刚, 刘 淼 (258)
- 无向图可迹的一个充分条件····· 张雪飞, 宫 雷, 王素云, 詹 环, 陈 平 (265)
- 肿瘤免疫无标度网络模型平衡点存在性及应用····· 逯兰芬, 王晶因 (270)
- 16 阶二次幻方的膨胀构造法····· 徐向东 (278)
- 贸易发展对旅游的溢出效应研究——基于中国—东盟的实证检验····· 陈 乔, 靳 诚 (285)
- 退化图中的子图计数问题研究····· 贺雪媛, 王 健 (294)
- 城市轨道交通运营规模与经济发 展的耦合协调性分析····· 李明明 (302)
- 二部图的单特征值····· 王 燕, 李家豪, 李清华 (309)**
- 基于能量模型的多壁碳纳米管多边形化的致因分析····· 高 婷, 张拥萍 (315)
- 基于有限集  $[N]$  上相交关系构造的二元等重码····· 蒋文丽, 武小云 (323)

# MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY

2021 Vol.51 No. 5

Contents

## Managed Science

- Lasso+SVM-based Early Warning Model of Financial Risks for Manufacturing Listedcompanies ..... ZHANG Chun-mei, ZHAO Ming-qing, GUAN Jun-qi (1)
- Based on Shapley Value-CCR Analysis of coal Utilization Efficiency and its Influencing Factors in Chinese Provinces ..... LIU Yu-jia, FU Ying-xiong, CHEN Wei-guo, FU Hui-jing, YU Ying-ying (13)
- Multi Objective Collaborative Optimization of Preventive Maintenance Management in Industrial Internet Environment ..... ZHOU Yuan-gao ZENG Xiang-jun, JIN Wei-yu, HE Yun-juan (27)
- Research on Semiparametric Threshold Generalized Asymmetric Stochastic Volatility Model ..... LIANG Qiu-yang, CHEN Jia-qing, WANG Ren-xiang (36)
- Family Optimal Investment Decision-making Problem under CEV model ..... ZHOU Shuang-long, WANG Ai-yin (45)
- Analysis of Pork Price Prediction Based on PCA-GM-BP Neural Network ..... LI Yang, WANG Xiao-guang (56)
- Research on Innovation Incentive Policy of Prefabricated Building Based on Evolutionary Game Theory ..... XUE Yuan, PENG Ying (64)
- Research on Perception and Transmission of Cotton Import Price after Punning Tax, Future Price and Spot Price—Based on VAR Model ..... WU Zhi-min, WANG Li, WU Qing-jun, WANG Bo (74)
- Research on CMMI Process Evaluation Method based on Hesitant Fuzzy Sets ..... ZHAO Juan (85)
- Dynamic Profit Distribution Optimization Model of Industry University Research Collaborative Innovation Willingness Under Market Demand ..... LI Wen-hua, TANG Hou-xing (93)
- Failure Risk Assessment of Automatic Tooling Assembly based on Cloud Model ..... YANG Cheng-cheng, WANG Ting, MO Shu (103)

## Applications

- Consider The Non-Structural Multi-Stage Production Process Scheduling Method ..... LAO Jian-guo, ZHANG Sheng-zhong (114)
- Influence of Hydrodynamic Effect on Seismic Performance of Continuous Rigid Frame Bridge based on Numerical Analysis ..... HUANG Wen, JIA Pan-xing, ZUO Guang-sheng, ZHANG Xiu-cheng (123)
- Dynamics in a Predator-Prey System with Predator Density-Independence and Distributed Delays ..... Abdujelil Abdurahman, Ahmadjan Muhammadhaji (131)
- Estimation of the Shape Parameter for Generalized Inverted Exponential Distribution under Bilateral Type-Icensored Sample ..... LIU Hua (138)
- Grey Wolf Algorithm Based on Improved Tent Chaos and Simulated Annealing ..... MAO Qing-hua, YANG Lin, WANG Yan-liang (147)
- Performance Analysis of  $MAP/M/1$  Queueing System with Working Breakdown and Finite Capacity ..... ZHANG Xiao-liang, Ye Qing-qing, PANG Yu-ying (162)
- The DEA Efficiency Evaluation of Decision Making Units with Large Quantity Difference Based on Cluster Analysis ..... ZHANG Xue-yi, MA Sheng-yun, MA Zhan-xin, HUANG Sharina (169)
- Fruit Fly Optimization Algorithm Based on Normal Cloud Model and Its Application ..... XING Hai-xia, SHI Jian-ping, SUO Ming-he, ZHOU Zhang-yu, DAI Tian-jun, CHEN Dong-yun, TAO Wan-ju (177)

## Research

- A New High Order Finite Difference/Spectral Approximations to the Time Fractional Diffusion Equations ..... CAO Jun-ying, ZHANG Xu-mei, YANG Xun, WANG Zi-qiang (188)
- Some Local and Global Integral Inequalities with Radon Measure on Bounded Domain ..... LI Qun-fang, LI Hua-can (196)
- On the Lagrangian Submanifolds in the 6-dimensional Nearly Kähler Manifolds with Second Order Parallel Second Fundamental Form ..... JIAO Hui-ping, XU Zi-li (203)
- Structured Variable Precision Rough Set ..... WAN Ren-xia, ZHANG Hai-di, MIAO Duo-qian (208)
- Self-adaptive Sliding Mode Synchronization of Hyperchaotic Fractional-order Bao Systems ..... ZHANG Wei, MAO Bei-xing (214)
- Connectedness of Approximate Henig Efficient Solution Sets for Set-valued Optimization Problems with Constraints ..... WU Chang-yao, CHEN Jian-chen (221)
- Finite-time Synchronization of Four-wings Chaotic Systems Based on Adaptive Fuzzy Control Approach ..... LIN Fu-ning, XUE Guang-ming, SU Guang-wang, ZHANG Jing-hua (228)
- Existence and Uniqueness of Solutions for a Class of Multi-point Boundary Value Problem with  $p$ -Laplacian Operator ..... WANG He-xiang (238)
- On Some Limit Properties of Moving Relative Entropy ..... REN Yuan-yuan, WANG Zhong-zhi (244)

## Teaching Research

- Research On Dynamical System of Mixed Fermentation Basing On Two Bacteroids ..... ZHENG Li-fei, JIE Yu, QIN Bao-fu (250)
- Analysis and Prediction of Total Population in Xinjiang Based on Improved Grey GM (1,1) Model ..... TIAN Zi-chen, JI Gang, LIU Miao (258)
- A Sufficient Condition on Traceable ..... ZHANG Xue-fei, GONG Lei, WANG Su-yun, ZHAN Huan, CHEN Ping (265)
- Existence of Equilibrium and Application in Scale-free Tumor-Immune Network ..... LU Lan-fen, WANG Jing-nan (270)
- Expansion Construction Methods of 16 Order Bimagic Square ..... XU Xiang-dong (278)
- Study on Spillover Effects of Trade Development on Tourism —Based on the empirical test between China and ASEAN ..... CHEN Qiao, JIN Cheng (285)
- Study on the Counting of Subgraphs in Degenerate Graph ..... HE Xue-yuan, WANG Jian (294)
- The Coupling Coordination Analysis On Scale Of Urban Rail Transit Operation and Economic Development ..... LI Ming-ming (302)
- Simple Eigenvalues of Bipartite Graphs ..... WANG Yan, LI Jia-hao, LI Qing-hua (309)
- Polygonization of Multiwalled Carbon Nanotube Based on Energy Model ..... GAO Ting, ZHANG Yong-ping (315)
- Construction of a Binary Constant Weight Code Based on Intersection Relation of Subsets in the Finite Set  $[N]$  ..... JIANG Wen-li, WU Xiao-yun (323)

## 二部图的单特征值

王 燕, 李家豪, 李清华 \*

(烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

**摘 要:** 一个图的特征值通常指的是它的邻接矩阵的特征值, 在图的所有特征值中, 重数为 1 的特征值即所谓的单特征值具有特殊的重要性. 确定一个图的单特征值是一个比较困难的问题, 主要是没有一个通用的方法. 1969 年, Petersdorf 和 Sachs 给出了点传递图单特征值的取值范围, 但是对于具体的点传递图还需要根据图本身的特性来确定它的单特征值. 给出一类正则二部图, 它们是二面体群的凯莱图, 这类图的单特征值中除了它的正、负度数之外还有 0 或者  $\pm 1$ , 而它们恰好是 Petersdorf 和 Sachs 所给出的单特征值范围内的中间取值.

**关键词:** 二部图; 凯莱图; 特征值

### 1 引言

在图论中, 图的特征值和特征向量通常指的是其邻接矩阵的特征值和特征向量. 图的谱指的是图的特征值和它们的重数. 图的谱是图的一个重要的代数不变量, 它反映出图的许多重要的组合性质. 关于图谱的相关介绍, 请参考文献 [1] 和 [2]. 到目前为止, 仅少数图的特征值被计算出来. 完全图, 半正则二部图, 循环图, 路等最基本的图的谱最早被算出 [3]. 专著 [4] 的附录中一一列举了含有七个顶点的所有连通简单图 (853 个) 的特征值. 与化学密切相关的图类中, 有  $N$  个六角形的六角形直链的特征值为  $\pm 1$  和  $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{9 + 8 \cos \frac{\pi j}{N+1}})$ ,  $j = 1, \dots, N$  [3]. 最近二十几年来, 也有一些特殊图的谱被计算出来, 例如 De Bruijn 图和 Kautz 图 [3], Knodel 图 [4], 正则与半正则多面体 [5-6], 旋转度为零的环面六角系统 [7] 等等.

在一个图的所有特征值中, 重数为 1 的特征值被称为单特征值. 这种单特征值往往表达出图的某些特殊性质, 因此研究图的单特征值具有一定的意义. 众所周知, 连通  $k$ -正则图 (即任意点的度是  $k$ ) 的任一特征值  $\lambda$  满足  $|\lambda| \leq k$ , 而且  $k$  是单特征值. 相似的, 连通  $k$ -正则二部图的任一特征值  $\mu$  满足  $|\mu| \leq k$ , 而且  $k$  和  $-k$  都是单特征值. 因此, 正则二部图的单特征值至少是两个. 关于二部图特征值的研究也有不少工作, 请参考文献 [8-11]. 特别地, Mohar 在 [8] 中研究了二部图的“中间”特征值, 给出了一个范围.

如果一个图的自同构群在图的顶点集合上作用传递, 则称这个图是一个点传递图. 点传递图是一类正则图. 那么, 一个点传递二部图除了它的正、负度数之外还有没有单特征值?

收稿日期: 2020-09-08

资助项目: 国家自然科学基金 (1671347, 61771019); 山东省自然科学基金 (ZR2017MA022); 山东省本科教改重点项目 (Z2018S049)

\* 通信作者

或者说,如何确定一个点传递二部图除去它的正、负度数之外的单特征值?在文献 [12] 中, Petersdorf 和 Sachs 给出了点传递图单特征值的范围,但是对于具体的点传递图还需要根据图本身的特性来确定它的单特征值.在文献 [13] 中,作者特别考虑了 Petersdorf 和 Sachs 的理论在凯莱图上的表现,而在文章文献 [14] 中作者给出了两类恰好具有两个单特征值的循环图,证明了对于 Petersdorf 和 Sachs 给出的点传递图单特征值范围内的取值,都有相应的循环图以这个值为单特征值.本文中,我们给出了恰好具有 3 个  $(\{k, -k, 0\})$  或者 4 个  $(\{k, -k, \pm 1\})$  单特征值的一类二部图,这里  $k$  是图的度数,这类图是二面体群的凯莱图.特别地, 0 或者  $\pm 1$  恰好是 Petersdorf 和 Sachs 所给出的单特征值范围内的中间取值.

## 2 预备知识

**定义 2.1(右循环矩阵)**  $R = (r_{st})_{n \times n}$  是一个  $n \times n$  矩阵,如果  $R$  的第  $s$  行是  $R$  的第一行向右平移  $s-1$  步得到的,那么称  $R$  是右循环矩阵.也就是说,  $R$  中的元素满足  $r_{st} = r_{1, t-s+1}$ . 其中,下标属于  $\{1, 2, \dots, n\}$  且模  $n$  运算.

**定义 2.2(左循环矩阵)**  $L = (l_{st})_{n \times n}$  是一个  $n \times n$  矩阵,如果  $L$  的第  $s$  行是  $L$  的第一行向左平移  $s-1$  步得到的,那么称  $L$  是左循环矩阵.也就是说,  $L$  中的元素满足  $l_{st} = l_{1, s+t-1}$ . 其中,下标是模  $n$  运算并且属于  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

为了在以后的叙述中更加方便,我们用  $[r_1, r_2, \dots, r_n]_R$  表示右循环矩阵,其中,  $r_m, 1 \leq m \leq n$  是该矩阵的第一行元素,用  $[l_1, l_2, \dots, l_n]_L$  表示左循环矩阵,其中,  $l_m, 1 \leq m \leq n$  是该矩阵的第一行元素.

**注** 1) 从定义可以看出,左循环矩阵是对称矩阵;

2) 在图论中,循环矩阵通常指的是右循环矩阵.在本文中,为区分这两种平移方式得到的矩阵,我们分别定义了左循环矩阵和右循环矩阵.然而,这两种循环矩阵之间也有一定的联系.

**引理 2.3**<sup>[13]</sup> 令  $L$  是左循环矩阵,那么,  $L^2$  是右循环矩阵而且也是对称矩阵.

**引理 2.4** 令  $L = [l_1, l_2, \dots, l_n]_L$  和  $R = [r_1, r_2, \dots, r_n]_R$  分别是一个  $n$ -级左循环矩阵和一个  $n$ -级右循环矩阵且  $R = L^2$ . 则

$$r_s = \sum_{j=1}^{n-s} l_j l_{j+s} + \sum_{k=n-s+1}^n l_k l_{k-n+s-1}, 1 \leq s \leq n.$$

**证明** 因为  $R = L^2$ , 所以  $(r_1, r_2, \dots, r_n) = (l_1, l_2, \dots, l_n)L$ . 由矩阵乘法容易得到结论.

**引理 2.5**<sup>[13]</sup> 令  $L = [l_1, l_2, \dots, l_n]_L$  是左循环矩阵,  $L^2 = [r_1, r_2, \dots, r_n]_R$ , 那么

$$\sum_{k=1}^n r_k = \left( \sum_{m=1}^n l_m \right)^2.$$

**定义 2.6** 假定  $G$  是有限群,  $S$  是  $G$  的子集. 如果  $S$  中不含单位元, 逆封闭, 并且可以生成  $G$ , 则称  $S$  是  $G$  的一个凯莱子集. 如果一个图的顶点集合为  $G$ , 两个顶点  $g$  和  $h$  相邻当且仅当  $g^{-1}h \in S$ , 则称这个图为  $G$  相应于凯莱子集  $S$  的一个凯莱图, 记作  $\text{Cay}(G, S)$ .

众所周知, 右循环矩阵的特征值可以用其第一行元素表示出来. 下面两个引理请参考文献 [1].

**引理 2.7**<sup>[1]</sup> 令  $R = [r_0, r_1, \dots, r_{n-1}]_R$  为一个右循环矩阵, 那么  $R$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_t = r_0 + r_1\varpi_t + r_2\varpi_t^2 + \dots + r_{n-1}\varpi_t^{n-1}$ , 其中  $\varpi_t = e^{\frac{2t\pi i}{n}}$ ,  $0 \leq t \leq n-1$ , 其中  $i^2 = -1$ .

**引理 2.8**<sup>[1]</sup> 令  $\Gamma$  为连通  $k$  度点传递图,  $\lambda$  是  $\Gamma$  的单特征值. 如果  $\Gamma$  有奇数个顶点, 那么  $\lambda = k$ ; 如果  $\Gamma$  有偶数个顶点, 那么  $\lambda = 2\alpha - k$ , 其中  $\alpha$  是满足  $0 \leq \alpha \leq k$  的某个值.

由引理 2.8 可以看出, 点传递图的单特征值问题主要是针对偶数点的点传递图. 二面体群的凯莱图是具有偶数点的点传递图, 下文中我们将给出由二面体群构造出的一类二部图, 并研究其单特征值.

### 3 凯莱二部图的单特征值

令  $D_n = \{\theta, \tau | \theta^n = \tau^2 = 1, \tau\theta\tau = \theta^{-1}\}$  是阶为  $2n$  的二面体群,  $S = \{\tau, \tau\theta^u, \tau\theta^v, \dots, \tau\theta^w\}$  是  $D_n$  的凯莱子集,  $S$  中有  $k$  个元素, 易知凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S)$  是一个二部图. 在文献 [13] 中给出了这类图的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

这里  $B = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]_L$  是左循环  $\{0, 1\}$ - 矩阵 (即元素都是 0 或者 1 的矩阵), 其中  $b_j = 1$  当且仅当  $\tau\theta^{j-1} \in S$ . 因此,  $k = \sum_{t=0}^{n-1} b_t$ , 而且由引理 2.5 知  $B^2$  是右循环矩阵. 记  $B^2 = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]_R$ , 那么  $\sum_{t=0}^{n-1} c_t = k^2$ . 因为  $B^2$  是右循环矩阵, 所以根据引理 2.7 可知  $B^2$  的特征值为

$$\mu_t = c_0 + c_1\varpi_t + c_2\varpi_t^2 + \dots + c_{n-1}\varpi_t^{n-1}, \varpi_t = e^{\frac{2t\pi i}{n}}, t = 0, 1, \dots, n-1.$$

而且由于  $B^2$  是对称矩阵可知  $c_t = c_{n-t}$ , 再由简单计算可以看出  $\varpi_{n-t} = \varpi_t^{-1}$ , 因此可得到  $\mu_t = \mu_{n-t}$ . 这样,  $B^2$  的所有可能的单特征值是  $\mu_0 = \sum_{t=0}^{n-1} c_t = k^2$  和当  $n$  为偶数时的

$$\mu_{\frac{n}{2}} = c_0 - c_1 + c_2 - \dots - c_{n-1}.$$

在文献 [13] 中, 作者已经讨论过这类矩阵的单特征值, 证明了  $A$  的单特征值必定是  $B$  或者  $-B$  的单特征值, 而且  $B$  或者  $-B$  的单特征值是由  $B^2$  的单特征值开方得到, 但是反之不一定成立.

**引理 3.1**<sup>[13]</sup> 令  $D_n, S, A, B$  分别为上面所描述的二面体群, 其凯莱子集和邻接矩阵. 则当  $n$  是奇数时,  $A$  恰好有两个单特征值  $k$  和  $-k$ ; 当  $n$  是偶数时, 它除去  $\pm k$  外至多有两个单特征值, 也就是

$$\pm \sqrt{c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots - c_{n-1}}$$

如果我们把它写成  $2\alpha - k$  的形式, 那么

$$\alpha = \frac{k \pm \sqrt{c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots - c_{n-1}}}{2}.$$

这个结论虽然给出了  $A$  的可能存在的单特征值, 但是没有一般的方法可以确定这个值的确是  $A$  的单特征值, 这要依赖于矩阵  $B$ . 现在我们考虑  $D_n$  的一类特殊的凯莱图, 即令  $S = \{\tau\theta^j, \tau\theta^{j+1}, \tau\theta^{j+2}, \dots, \tau\theta^{j+k-1}\}$ , 则有下面的引理 3.2.



**引理 3.2** 令  $D_n = \{\theta, \tau \mid \theta^n = \tau^2 = 1, \tau\theta\tau = \theta^{-1}\}$  是阶为  $2n$  的二面体群,

$$S = \{\tau\theta^j, \tau\theta^{j+1}, \tau\theta^{j+2}, \dots, \tau\theta^{j+k-1}\}, S_0 = \{\tau, \tau\theta, \tau\theta^2, \dots, \tau\theta^{k-1}\},$$

其中  $\theta$  的方幂模  $n$  运算. 则  $\text{Cay}(D_n, S)$  同构于  $\text{Cay}(D_n, S_0)$ .

**证明** 定义  $f: D_n \rightarrow D_n$ , 使得  $f(\theta) = \theta, f(\tau) = \tau\theta^j$  并且将其扩充为  $D_n$  的一个群自同构. 因此,  $f(\tau\theta^r) = f(\tau\theta^{r+j})$ , 从而  $f(S_0) = S$  并且  $f$  是  $\text{Cay}(D_n, S_0)$  到  $\text{Cay}(D_n, S)$  的一个同构.

由引理 3.2, 凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S)$  和  $\text{Cay}(D_n, S_0)$  具有相同的特征值. 凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S_0)$  的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

这里  $B = [1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0]_L$  是左循环矩阵, 其第一行元素具有  $k$ - 个连续的 1, 其它元素都为 0. 根据引理 3.1, 我们只需要在  $n$  是偶数的前提下从  $B^2$  的单特征值出发确定  $A$  是否有单特征值.

**定理 3.3** 令  $B = [1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0]_L$  是  $n$ - 阶左循环矩阵, 其第一行元素具有  $k$ - 个连续的 1, 其它元素都为 0. 则当  $n$  是偶数时, 对于右循环  $n$ - 阶对称矩阵  $B^2 = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$  有以下结论成立.

1)  $c_0 = k, c_1 = k-1, \dots, c_{k-1} = 1, c_t = 0, k \leq t \leq n-k, c_{n-k+1} = 1, c_{n-k+2} = 2, \dots, c_{n-1} = k-1$ .

2)  $B^2$  的特征值  $\mu_t = k + 2 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) \cos \frac{2jt\pi}{n}, t = 0, 1, \dots, n-1$ .

3)

$$\mu_{\frac{n}{2}} = c_0 - c_1 + c_2 - \dots - c_{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } k \text{ 是奇数,} \\ 0, & \text{如果 } k \text{ 是偶数.} \end{cases} \quad (3)$$

**证明** 由引理 2.4  $c_s = \sum_{j=0}^{n-s-1} b_j b_{j+s} + \sum_{j=n-s}^{n-1} b_j b_{j-n+s}, 1 \leq s \leq n$ , 这里  $b_0 = \dots = b_{k-1} = 1, b_j = 0, k \leq j \leq n-1$ . 通过计算可以得到  $c_0 = k, c_1 = k-1, \dots, c_{k-1} = 1, c_t = 0, k \leq t \leq n-k, c_{n-k+1} = 1, c_{n-k+2} = 2, \dots, c_{n-1} = k-1$ .

由于  $B^2$  的特征值为  $\mu_t = c_0 + c_1 \varpi_t + c_2 \varpi_t^2 + \dots + c_{n-1} \varpi_t^{n-1}, \varpi_t = e^{\frac{2t\pi i}{n}}, t = 0, 1, \dots, n-1$ , 将上述  $c_j, 0 \leq j \leq n-1$  的值代入可得到

$$\mu_t = k + 2(k-1) \cos \frac{2t\pi}{n} + \dots + 2(k-(k-2)) \cos \frac{2(k-2)t\pi}{n} + 2(k-(k-1)) \cos \frac{2(k-1)t\pi}{n}.$$

特别地, 当  $t = \frac{n}{2}$  时可以得到  $\mu_{\frac{n}{2}} = 1$  或者 0 分别对应于  $k$  是奇数或者偶数.

根据定理 3.3 可知, 当  $n$  是偶数时本节给出的二部凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S)$  最多有 4 个单特征值, 即当  $k$  是奇数单特征值为  $k, -k, 1, -1$ , 此时相应于引理 2.8 中的  $\alpha = \frac{k+1}{2}$  和  $\alpha = \frac{k-1}{2}$ , 而当  $k$  是偶数单特征值为  $k, -k, 0$ , 此时相应于引理 2.8 中的  $\alpha = \frac{k}{2}$ . 现在的问题是  $\mu_{\frac{n}{2}}$  有没有可能和  $\mu_t, t \neq 0, \frac{n}{2}$  中的某个值相等, 这种情况下  $\mu_{\frac{n}{2}}$  不再是单特征值. 下面我们给出  $2 \leq k \leq 9$  时  $\text{Cay}(D_n, S)$  恰好具有 3 个或者 4 个单特征值的充分必要条件.

**例 3.1** 根据定理 3.3,  $\mu_t = k + 2 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) \cos \frac{2jt\pi}{n}, t = 0, 1, \dots, n-1$ .

1) 当  $k = 2$  时,  $\mu_t = 2 + 2 \cos \frac{2t\pi}{n}$ . 此时  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$ . 计算  $\mu_t = 0$  可以得到  $t = \frac{(2m+1)n}{2}$ ,  $m \in Z$ . 但是由于  $0 \leq t \leq n-1$  等式  $t = \frac{(2m+1)n}{2}$  成立仅当  $m = 0, t = \frac{n}{2}$ , 这说明 0 的确是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根.

2) 当  $k = 3$  时,  $\mu_t = 3 + 4 \cos \frac{2t\pi}{n} + 2 \cos \frac{4t\pi}{n}$ . 此时  $\mu_{\frac{n}{2}} = 1$ . 计算  $\mu_t = 1$  可以得到  $t = \frac{(2m+1)n}{4}$ ,  $m \in Z$ . 但是由于  $0 \leq t \leq n-1$  等式  $t = \frac{(2m+1)n}{4}$  成立仅当  $m = 0, t = \frac{n}{4}$  或者  $m = 1, t = \frac{3n}{4}$ , 这说明当  $n$  不能被 4 整除时 1 和  $-1$  的确是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根.

3) 类似于  $k = 2, 3$  时的情形, 当  $k = 4$  时  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$  是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根当且仅当  $n$  不能被 4 整除; 当  $k = 5, 7$  时  $\mu_{\frac{n}{2}} = \pm 1$  是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根当且仅当  $n$  不能被 3, 4 整除; 当  $k = 6, 8$  时  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$  是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根当且仅当  $n$  不能被 3, 4 整除; 当  $k = 9$  时  $\mu_{\frac{n}{2}} = \pm 1$  是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根当且仅当  $n$  不能被 3, 4, 5 整除.

从例 3.1 可以看出, 只要当  $t \neq 0, \frac{n}{2}$  时,  $\mu_t \neq \mu_{\frac{n}{2}}$  则  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$ , 或者  $\pm 1$  即为  $\text{Cay}(D_n, S)$  的单特征值. 考虑到  $2 \leq k \leq n, 1 \leq t \leq n-1$ , 必定存在足够大的素数  $p, n = 2p$  使得当  $t \neq 0, \frac{n}{2}$  时  $\mu_t \neq 0, \pm 1$ . 由此, 我们给出下面的猜想.

**猜想 3.1** 令  $D_n = \{\theta, \tau \mid \theta^n = \tau^2 = 1, \tau\theta\tau = \theta^{-1}\}$  是阶为  $2n$  的二面体群,

$$S = \{\tau, \tau\theta, \tau\theta^2, \dots, \tau\theta^{k-1}\}, k \geq 2,$$

这里  $\theta$  的方幂模  $n$  运算. 则当  $n = 2p, p$  为充分大的素数时, 凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S)$  恰好有 3 个或者 4 个单特征值, 即当  $k$  是奇数时为  $k, -k, 1, -1$ , 当  $k$  是偶数时为  $k, -k, 0$ .

## 参考文献

- [1] Biggs N. Algebraic Graph Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1974.
- [2] Godsil C, Royle G. Algebraic Graph Theory [M]. Berlin: Springer, 2001.
- [3] Cvetkocic D, Doob M, Sachs H. Spectra of Graph-Theory and Applications [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [4] Doob M, Gutman I, Cvetkovic D, Torgasev A. Recent results in the graph of spectra [M]. Amsterdam: North Holland, 1988.
- [5] Delorme C, Tillich J P. The spectrum of de Bruijn and Kautz graphs Europ [J]. JCombin, 1998, 19: 307-319.
- [6] Harutyunyan H A, Morosan C D. The spectra of Knodel graphs [J]. Information, 2006, 30: 295-299.
- [7] Saldanha N C, Tomei C. Spectra of regular polytopes [J]. Discrete Comput Geom, 1992, 7: 403-414.
- [8] Mohar B, Behruz T R. Median eigenvalues of bipartite graphs [J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 2015, 41: 899-909.
- [9] Chen Y F, Fu H L, Kim I J, Stehr E, Watts B, On the largest eigenvalues of bipartite graphs which are nearly complete [J]. Linear Algebra and its Applications, 2010, 432: 606-614.
- [10] Ghorbani E. Bipartite graphs with five eigenvalues and pseudo designs [J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 2012, 36:209-221.
- [11] Koledina T, Stanić Z. Regular bipartite graphs with three distinct non-negative eigenvalues [J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 438: 3336-3349.
- [12] Petersdorf M, Sachs H. Spektrum und Automorphismengruppe eines Graphen, Combinatorial theory and its applications, III [M]. Amsterdam: North-Holland, 1969: 891-907.



- [13] 张蕾, 王燕, 杨玉军, 凯莱图的单特征值 [J]. 烟台大学学报, 2020, 33(1): 1-5.  
[14] 王燕. 具有两个单特征值的循环图 [J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(19): 158-162.  
[15] 程汉波. 有理度数的三角函数值何时为有理数及其应用 [J]. 数学通讯, 2014, 12(2): 58-60.

## Simple Eigenvalues of Bipartite Graphs

WANG Yan, LI Jia-hao, LI Qing-hua

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

**Abstract:** The eigenvalues of a graph are usually referred to the eigenvalues of its adjacent matrix. Among all the eigenvalues, the simple eigenvalues (eigenvalues with multiplicity 1) are especially important. In lack of no general methods, it is quite difficult to determine the simple eigenvalues of a graph. In 1969, Petersdorf and Sachs gave a scope of the possible simple eigenvalues of a vertex-transitive graph. But, to find out which one is indeed simple among the possible values still depends on the graph itself. In this paper, we give a class of bipartite graphs which are also Cayley graphs of dihedral groups. Apart from the degrees and minus degrees of these graphs, the other simple eigenvalues are 0 or  $\pm 1$  that are exactly the “median” values in the scope given by Petersdorf and Sachs.

**Keywords:** bipartite graph; cayley graph; eigenvalue

# 《数学的实践与认识》编辑委员会

主 编：林 群

副主编：（以下按姓氏笔划为序）

卢 焱 叶其孝 朱广田（常务副主编）

李邦河 汪寿阳 宋春伟 张继平

编 委：王 术 王冬琳 王建明 龙永红 叶 专

史福贵 冯荣权 朱一心 许 进 李 宁

余志坤 张文岭 林源渠 郑连存 姜启源

骆顺龙 贾仲孝 郭懋正 唐仲伟 黄海洋

常彦勋

## 数学的实践与认识

Shuxue de Shijian yu Renshi

（半月刊）

第51卷

第5期

2021年3月

Journal of Mathematics in Practice and Theory

(Semimonthly)

Vol.51

No.5

March

2021

**编 辑** 中国数学会  
《数学的实践与认识》编委会  
地 址：北京大学数学科学学院  
邮政编码：100871  
电 话：(86-10)62759981  
电子邮件：bjmath@math.pku.edu.cn

**主 编** 林 群

**主管单位** 中国科学院

**主办单位** 中国科学院数学与系统科学研究院

**承办单位** 中国科学院系统科学研究所  
北京数学会

**出 版** **科学出版社**  
北京东黄城根北街16号  
邮政编码：100717

**印 刷** 中国文联印刷厂

**国内发行** 北京市邮局

**国外发行** 中国国际图书贸易总公司  
（北京399信箱）

**国内订购** 全国各地邮局

**网 址** <http://ssjs.cbpt.cnki.net>

**Edited by** Editorial Board of  
Mathematics in Practice and Theory  
School of Mathematical Sciences, PKU  
Beijing 100871, China  
Tel:(86-10)62759981  
Email:bjmath@math.pku.edu.cn

**Editor in Chief** LIN Qun

**Superintended by** Chinese Academy of Sciences

**Sponsored by** Academy of Mathematics and  
Systems Science, Chinese Academy  
of Sciences

**Co-sponsored by** Institute of Systems Science, Academy of  
Mathematics and Systems Science,  
Chinese Academy of Sciences  
Beijing Mathematical Society

**Published by** Science Press  
16 Donghuangchenggen North Street,  
Beijing 100717, China

**Printed by** Printing House of Wenlian in China

**Distributed at Home by** Beijing Post Office

**Distributed Abroad by** China International Book Trading  
Corporation (CIBTC) P.O.Box 399,  
Beijing, China

**Domestic Subscription** All Local Post Office

【如有印装质量问题，印刷厂负责调换电话010-68431909】

ISSN 1000-0984

国外发行代号Q47

CN11-2018/O1

国内发行代号2-809

定 价：人民币35.00元

ISSN 1000-0984

