全国中文核心期刊（2004 版）

2015 3

大学数学

College Mathematics

第三十一卷 VOL. 31

Daxue Shuxue

ISSN 1672-1454

《大学数学》杂志编委会

大 学 数 学

2015 年 6 月 第 31 卷 第 3 期(总第 179 期)

目 录

[期刊基本参数] CN 34-1221/O1 * 1984 * b * A4 * 128 * zh+en * P * ¥15.00 * 1200 * 26 * 2015-06

本期责任编辑:周 玲,孙 琳,涂振坤

第 31 卷第 3 期　　大 学 数 学　　Vol. 31, №. 3
2015 年 6 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Jun. 2015

由平面方向决定的新型行列式

侯汝臣， 朱用文， 王 燕
（烟台大学 数学与信息科学学院，山东 烟台 264005）

［摘　要］设 F 是一个域. 任给 F 中的一对元素 (k_1,k_2)，给出了 (k_1,k_2)-型行列式的定义. 我们指出通常的行列式恰是 $(1,-1)$-型. 研究了这些 (k_1,k_2)-行列式的性质，指出和通常行列式的相同和不同之处. 刻画了一些特殊的 $(r,-r)$-型，$(r,0)$-型和 (r,r)-型行列式的性质.

［关键词］方阵；行列式；(k_1,k_2)-型行列式
［中图分类号］O151.22　　［文献标识码］C　　［文章编号］1672-1454(2015)03-0070-06

1 引　言

在线性代数中，方阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 是一个非常重要的常数. 自从莱布尼茨 1683 年在有记载论文中首次提到行列式到现在，行列式在理论和应用上都取得了丰富成果，参考[1]，[2]，[3]等. 丰富和完善行列式理论的一个重要方向是对行列式理论进行推广性研究. 例如，超多项式理论，拟多项式理论，量子多项式理论等等，参考[4]，[5]，[6]等. 本文定义了一种新型行列式，发现这种行列式是通常行列式的一种自然且新颖的推广. 对这种新型行列式的性质进行了深刻研究，相当于对通常行列式的性质从一个新的角度进行了全新理解. 这样，在教学工作中，我们会引领学生以发散型思维考虑问题，加深对行列式的理解.

若 $1,2,\cdots,n$ 是 n 个紧邻自然数，则 $1,2,\cdots,n$ 按大小关系有自然的序. 设 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的 一个排列，则可以定义 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.

设 F 是一个域，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是定义在 F 上的一个方阵，$\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式定义为

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i_1\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

注意到 n 阶行列式是 n！项的和，每一项与 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列对应，确切的说，同时与排列和排列的逆序数对应. 受这种观察的启发，作为通常行列式概念的推广，在本文中给出 (k_1,k_2)-型行列式的定义，其中 $k_1,k_2\in F$. 用 $P(n)$ 表示 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列组成的集合.

定义 1.1　设 $k_1,k_2\in F$，在 $P(n)$ 上定义一个映射 $\varphi(k_1,k_2)$ 如下：设 $\sigma\in P(n)$，定义

$$\varphi(k_1,k_2)(\sigma)=\begin{cases}k_1, & \tau(\sigma)\text{是偶数},\\ k_2, & \tau(\sigma)\text{是奇数}.\end{cases}$$

定义 1.2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是域 F 上的一个方阵，$k_1,k_2\in F$，定义

$$|\boldsymbol{A}|_{(k_1,k_2)}=\sum_{\sigma\in P(n)}\varphi(k_1,k_2)(\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

其中 $\sigma=i_1i_2\cdots i_n$.

称 $|\boldsymbol{A}|_{(k_1,k_2)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 所对应的 (k_1,k_2)-型行列式. 也用 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 所对应的 (k_1,k_2)-型行列式. 注意到 $\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{A})$ 恰好是 $|\boldsymbol{A}|$. 所以以上定义的 (k_1,k_2)-型行列式确实是通常行列式的一种推广. 根据

［收稿日期］2014-11-20；［修改日期］2014-12-17
［基金项目］国家自然科学基金(11371307)； 烟台大学教学改革研究项目(2012C091，2014C047)

定义注意到 $\det_{(0,0)}(\boldsymbol{A})=0$. 本文将刻画一般 (k_1,k_2)-型行列式和通过赋予 k_1,k_2 具体的值得到的一些特殊 (k_1,k_2)-型行列式的性质. 如果没有特别指出,规定所有的矩阵都定义在数域 F 上.

2 (k_1,k_2)-型行列式的性质

设 $\pi\in P(n)$, 规定 π 所代表的 $1,2,\cdots,n$ 的排列为 $\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)$. 首先注意到, 给定 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $k_1,k_2\in F$,有

$$|\boldsymbol{A}|_{(k_1,k_2)}=\sum_{\pi\in P(n)}\varphi(k_1,k_2)(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}$$
$$=\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}.$$

定理 2.1　如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵, $k_1,k_2\in F$,并且 $k_1\neq0$, 那么

$$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})=k_1\det_{\left(1,\frac{k_2}{k_1}\right)}(\boldsymbol{A}).$$

相似的, 如果 $k_2\neq0$,那么

$$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})=k_2\det_{\left(\frac{k_1}{k_2},1\right)}(\boldsymbol{A}).$$

证　如果 $k_1\neq0$, 那么

$$\det_{(k_1,k_2)}(A)=\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}$$
$$=k_1\left(\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}\frac{k_2}{k_1}a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}\right)$$
$$=k_1\det_{\left(1,\frac{k_2}{k_1}\right)}(\boldsymbol{A}).$$

$k_2\neq0$ 情况相似可证. 定理证毕.

如果 $k_1:k_2=k_3:k_4$,由定理 2.1,作为从所有 n 阶方阵构成的集合到数域 F 的算子,会有 $\det_{(k_1,k_2)}$ 和 $\det_{(k_3,k_4)}$ 成固定的比例,所以称 (k_1,k_2)-型行列式为由平面方向决定的行列式.

命题 2.2　如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵,$k_1,k_2,k_3,k_4\in F$ 那么

$$\det_{(k_1+k_2,k_3+k_4)}(\boldsymbol{A})=\det_{(k_1,k_3)}(\boldsymbol{A})+\det_{(k_2,k_4)}(\boldsymbol{A}).$$

证　因为

$$\det_{(k_1+k_2,k_3+k_4)}(A)=\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}(k_1+k_2)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}(k_3+k_4)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}$$
$$=\left(\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_3a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}\right)$$
$$+\left(\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_2a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_4a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}\right)$$
$$=\det_{(k_1,k_3)}(\boldsymbol{A})+\det_{(k_2,k_4)}(\boldsymbol{A}),$$

所以命题得证.

定理 2.3　如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,$k_1,k_2\in F$,那么

$$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})=\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A}^T).$$

证　如果能证明 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A}^T)$ 中的任意加法项存在于 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 中, 那么因为 $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$,所以 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 中的任意加法项也位于 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A}^T)$ 中,因此 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 和 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A}^T)$ 有相同的加法项,这样就证明了结论. 根据 (k_1,k_2)-型行列式的定义,这是容易证明的. 例如, 假设 $\tau(\pi)$ 是偶数, $k_1a'_{1\pi(1)}a'_{2\pi(2)}\cdots a'_{n\pi(n)}$ 是 $\det_{(k_1,k_2)}(A^T)$ 中的一个加法项,在 $P(n)$ 中存在 σ 使得

$$k_1a'_{1\pi(1)}a'_{2\pi(2)}\cdots a'_{n\pi(n)}=k_1a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}=k_1a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

容易证明 $\tau(\sigma)$ 也是偶数, 因此 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 中有这个加法项. 证毕.

根据定理 2.3 知道和方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行相关的 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 的性质也对 $\boldsymbol{A}$ 的列成立. 所以为了简便起见,我们只阐述和 $\boldsymbol{A}$ 的行相关的 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 的性质,而对于 $\boldsymbol{A}$ 的列,$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 有完全相同的性质.

和行列式相似,关心在给 $\boldsymbol{A}$ 一个行变换的情况下,(k_1,k_2)-型行列式 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 的改变. 下面的一

系列有趣结论对此进行了刻画.

定理 2.4 如果 P 是一个 n 阶行交换基本矩阵，即 P 由单位矩阵交换两行得到，A 是一个 n 阶方阵，$k_1,k_2\in F$，那么 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{PA})=\det_{(k_2,k_1)}(\boldsymbol{A})$.

证 设 $1\leqslant u<v\leqslant n$，交换单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的 u,v 两行得 n 阶行交换基本矩阵 $\boldsymbol{P}$. 又设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}=\boldsymbol{PA}$. 那么如果 $i\neq u,v$，有 $b_{ij}=a_{ij}$，而 $b_{uj}=a_{vj}$，$b_{vj}=a_{uj}$. 根据 (k_1,k_2)-型行列式的定义，有

$$\begin{aligned}
&\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{B})\\
=&\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1b_{1\pi(1)}\cdots b_{u\pi(u)}\cdots b_{v\pi(v)}\cdots b_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2b_{1\pi(1)}\cdots b_{u\pi(u)}\cdots b_{v\pi(v)}\cdots b_{n\pi(n)}\\
=&\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}\cdots a_{v\pi(u)}\cdots a_{u\pi(v)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2a_{1\pi(1)}\cdots a_{v\pi(u)}\cdots a_{u\pi(v)}\cdots a_{n\pi(n)}\\
=&\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}\cdots a_{u\pi(v)}\cdots a_{v\pi(u)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2a_{1\pi(1)}\cdots a_{u\pi(v)}\cdots a_{v\pi(u)}\cdots a_{n\pi(n)}\\
=&\sum_{\sigma\in P(n),\tau(\sigma)\text{是奇数}}k_1a_{1\sigma(1)}\cdots a_{u\sigma(u)}\cdots a_{v\sigma(v)}\cdots a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in P(n),\tau(\sigma)\text{是偶数}}k_2a_{1\sigma(1)}\cdots a_{u\sigma(u)}\cdots a_{v\sigma(v)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
=&\det_{(k_2,k_1)}(\boldsymbol{A}),
\end{aligned}$$

其中对 π 进行一次对换可得 σ. 证毕.

和行列式的行交换性质进行比较，定理 2.4 揭示了更多信息，更接近本质.

推论 2.5 如果方阵 A 有两行相等，$k_1,k_2\in F$ 那么

$$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})=\det_{(k_2,k_1)}(\boldsymbol{A}).$$

证 因为 A 有相同的两行，交换这两行我们还会得到 $\boldsymbol{A}$. 根据定理 2.4 易证.

设 A 是一个有两行相等的方阵，根据推论 2.5

$$|\boldsymbol{A}|=\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{A})=\det_{(-1,1)}(\boldsymbol{A}),$$

而根据定理 2.1 有

$$\det_{(-1,1)}(\boldsymbol{A})=-\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{A})=-|\boldsymbol{A}|,$$

所以推出 $|\boldsymbol{A}|=0$. 这恰好是众所周知的结论.

命题 2.6 如果把 n 阶方阵 A 表示成行向量组 $(\boldsymbol{\alpha}_1^T\ \ \boldsymbol{\alpha}_2^T\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_i^T+\boldsymbol{\beta}^T\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n^T)^T$，那么对 $k_1,k_2\in F$，有

$$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})=\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{B})+\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{C}),$$

其中 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T\ \ \boldsymbol{\alpha}_2^T\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_i^T\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n^T)^T$，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T\ \ \boldsymbol{\alpha}_2^T\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}^T\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n^T)^T$.

证 令 $\boldsymbol{\alpha}_j^T=(a_{j1}\cdots a_{jn})^T$ 其中 $j=1,\cdots,n$. 令 $\boldsymbol{\beta}^T=(b_{i1}\cdots b_{in})^T$ 其中 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$. 则

$$\begin{aligned}
&\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})\\
=&\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}\cdots(a_{i\pi(i)}+b_{i\pi(i)})\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2a_{1\pi(1)}\cdots(a_{i\pi(i)}+b_{i\pi(i)})\cdots a_{n\pi(n)}\\
=&\Big(\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}\Big)\\
&+\Big(\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}\cdots b_{i\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2a_{1\pi(1)}\cdots b_{i\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}\Big)\\
=&\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{B})+\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{C}).
\end{aligned}$$

命题 2.7 如果 A 是一个 n 阶方阵，把 A 的某行乘以常数 r 得到方阵 $\boldsymbol{B}$，$k_1,k_2\in F$，那么

$$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{B})=r\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A}).$$

证 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 u 行乘以常数 r，其它行保持不变，得到矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$. 则对于 $i\neq u$，有 $b_{ij}=a_{ij}$，而 $b_{uj}=ra_{uj}$. 因此

$$\begin{aligned}
&\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{B})\\
=&\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1b_{1\pi(1)}\cdots b_{u\pi(u)}\cdots b_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2b_{1\pi(1)}\cdots b_{u\pi(u)}\cdots b_{n\pi(n)}\\
=&\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}\cdots ra_{u\pi(u)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2a_{1\pi(1)}\cdots ra_{u\pi(u)}\cdots a_{n\pi(n)}\\
=&r\Big(\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}}k_1a_{1\pi(1)}\cdots a_{u\pi(u)}\cdots a_{n\pi(n)}+\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是奇数}}k_2a_{1\pi(1)}\cdots a_{u\pi(u)}\cdots a_{n\pi(n)}\Big)
\end{aligned}$$

$$=r\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A}).$$

用定义易证下面结论.

命题 2.8　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶上三角方阵，则对 $k_1,k_2\in F$，有

$$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})=k_1a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对下三角方阵有相同结论.

3　一些特殊的 (k_1,k_2)-型行列式

设 $k_1,k_2\in F$，根据命题 2.2 有

$$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})=\det_{(k_1,-k_1+k_2+k_1)}(\boldsymbol{A})=\det_{(k_1,-k_1)}(\boldsymbol{A})+\det_{(0,k_1+k_2)}(\boldsymbol{A}),$$

因此要计算 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 只需计算 $\det_{(k_1,-k_1)}(\boldsymbol{A})$ 和 $\det_{(0,k_1+k_2)}(\boldsymbol{A})$. 所以研究 $(r,-r)$-型和 $(0,r)$-型行列式很有价值，$r\in F$. 首先，考察 $(r,-r)$-型行列式.

命题 3.1　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$a,b\in F$，则

$$\det_{(ab,-ab)}(\boldsymbol{AB})=\det_{(a,-a)}(\boldsymbol{A})\det_{(b,-b)}(\boldsymbol{B}).$$

证　根据定理 2.1 有

$$\det_{(ab,-ab)}(\boldsymbol{AB})=ab\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{AB}),$$

$$\det_{(a,-a)}(\boldsymbol{A})=a\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{A}),\quad \det_{(b,-b)}(\boldsymbol{B})=b\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{B}),$$

又因为

$$\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{AB})=\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{A})\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{B}),$$

这样就证明了结论.

推论 3.2　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$r\in F$，则

$$r\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{AB})=\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{B}).$$

证　因为 $r\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{AB})=\det_{(r^2,-r^2)}(\boldsymbol{AB})$，所以根据命题 3.1 得证.

命题 3.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$r\in F$，$r\neq0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})\neq0$.

证　因为

$$\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})=r\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{A}),\quad r\neq0,$$

所以 $\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})\neq0$ 当且仅当 $\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{A})\neq0$，而 $\det_{(1,-1)}(\boldsymbol{A})\neq0$ 当且仅当 A 可逆.

推论 3.4　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶可逆方阵，$r\in F$，$r\neq0$，则

$$\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A}^{-1})=\frac{r^2}{\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})}.$$

证　首先注意到，根据 (k_1,k_2)-型行列式的定义 $\det_{(r,-r)}(I_n)=r$. 然后根据推论 3.2

$$r\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{AA}^{-1})=\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A}^{-1}),$$

即

$$r\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{I}_n)=r^2=\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A}^{-1}),$$

根据命题 3.3 有 $\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})\neq0$，所以

$$\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A}^{-1})=\frac{r^2}{\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})}.$$

命题 3.5　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 方阵，$\boldsymbol{A}$ 做一次换行或者换列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$r\in F$，那么

$$\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{B})=-\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A}).$$

证　根据定理 2.4 有 $\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{B})=\det_{(-r,r)}(\boldsymbol{A})$，又根据定理 2.1，有

$$\det_{(-r,r)}(\boldsymbol{A})=-\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A}),$$

所以命题得证.

推论 3.6　如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两行相等，$r\in F$，那么 $\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})=0$.

证　这是命题 3.5 的直接推论.

命题 3.7　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，$i\neq j$，$r\in F$，把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行的若干倍加到它的第 i 行，其它行保持

不变得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,那么

$$\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{B})=\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A}).$$

证　根据命题2.6知存在方阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{B})=\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{A})+\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{C}),$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 的 i,j 两行相等,又根据推论3.6,有 $\det_{(r,-r)}(\boldsymbol{C})=0$. 这就证明了命题.

其次,考察 $(r,0)$-型行列式.

命题3.8　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶对角方阵,$\boldsymbol{B}$ 是一个 n 阶方阵,$r\in F$,则

$$r\det_{(r,0)}(\boldsymbol{AB})=\det_{(r,0)}(\boldsymbol{A})\det_{(r,0)}(\boldsymbol{B}).$$

证　设 $\boldsymbol{A}$ 是依次以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 作为对角元素的 n 阶对角方阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$,那么

$$\begin{aligned} r\det_{(r,0)}(\boldsymbol{AB})&=r\det_{(r,0)}\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n}\\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn}\end{pmatrix}\\ &=r\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}} r(a_1b_{1\sigma(1)})(a_2b_{2\sigma(2)})\cdots(a_nb_{n\sigma(n)})\\ &=ra_1a_2\cdots a_n\sum_{\pi\in P(n),\tau(\pi)\text{是偶数}} rb_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{n\sigma(n)}\\ &=\det_{(r,0)}(\boldsymbol{A})\det_{(r,0)}(\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

最后,考察 (r,r)-型行列式. 根据定理2.4,容易证明

命题3.9　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}$ 经过一系列的换行或换列得到方阵 $\boldsymbol{B}$,$r\in F$,那么

$$\det_{(r,r)}(\boldsymbol{A})=\det_{(r,r)}(\boldsymbol{B}).$$

4　(k_1,k_2)-型行列式的一点应用

平面上一点 $(1,-1)$ 决定的 $(1,-1)$-型行列式恰好就是行列式. 行列式在线性代数,微分几何等领域有广泛且深刻的应用. 如果 $k\neq 0$,如文章第三部分所示,平面上点 $(k,-k)$ 所对应的 $(k,-k)$-型行列式和行列式有着几乎完全相同的性质,所以 $(k,-k)$-型行列式在线性代数,微分几何等领域也会有相似的应用.

下面简单考虑二阶 (k_1,k_2)-型行列式的几何意义. 不妨让我们在实数域上考虑问题. 二阶行列式的绝对值代表平面上一个平行四边形的面积. 那么 (k_1,k_2)-型行列式的绝对值代表什么呢?设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,则

$$\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})=k_1a_{11}a_{22}+k_2a_{12}a_{21}.$$

容易看出 $\det_{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{A})$ 的绝对值代表一个以向量 $(k_1a_{11},a_{21})^T$ 和 $(-k_2a_{12},a_{22})^T$ 作为两条边的平行四边形的面积.

最后,给出 $(1,1)$-型二阶行列式在速算中的一点应用. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,通常以十位制方法表示数,例如 $a_{11}a_{12}=a_{11}\times 10+a_{12}$. 则

$$\begin{aligned} a_{11}a_{12}\times a_{21}a_{22}&=(a_{11}\times 10+a_{12})\times(a_{21}\times 10+a_{22})\\ &=(a_{11}+a_{21})\times 100+(a_{11}\times a_{22}+a_{12}\times a_{21})\times 10+a_{12}\times a_{22}.\end{aligned}$$

此处交叉项10的系数恰好是 $\det_{(1,1)}(\boldsymbol{A})$.

[参 考 文 献]

[1]　Lay C, David. Linear algebra and its applications [M]. 3rd ed. Boston: Addison Wesley, 2005.

[2]　Jacobs D P V, Trevisan. The determinant of a tree′s neighborhood matrix[J]. Linear Algebra and its Applications,

1997, 256(15):235－249.

[3] Formanek E and Sibley D. The group determinant determines the group[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1991, 112(3): 649－656.

[4] Glynn, David G. The modular counterparts of Cayley's hyperdeterminants[J]. Bull. Australian Mathematical Society, 1998, 57: 479－492.

[5] Gelfand I, Gelfand S, Retakh V, Wilson R L. Quasideterminants[J]. Adv. Math., 2005, 193(1):56－141.

[6] Hayqashi T. Quantum groups and quantum determinants[J]. Journal of Algebra, 1992, 152:146－165.

New Type Determinants Determined by Directions in a Plane

HOU Ru-chen, *ZHU Yong-wen*, *WANG Yan*

(School of Mathematics and Information Science, Yantai University, Yantai Shandong 264005, China)

Abstract: Let F be a field, $k_1, k_2 \in F$. We give a definition of (k_1, k_2)-determinants, and point out that normal determinants are of $(1, -1)$-type. We study properties of (k_1, k_2)-determinants, compare (k_1, k_2)-determinants with normal determinants, find out differences and similarities between them. We also describe properties of special (k_1, k_2)-determinants such as $(r, -r)$-tpye, (r, 0)-type, and (r, r)-type.

Key words: square matrix; determinant; (k_1, k_2)-determinant

大学数学

（双月刊 · 1984 年创刊）
2015 年第 31 卷第 3 期
（总第 179 期）

*

College Mathematics
Vol.31, No.3, Jun.2015
(General Serial No.179)
(Bimonthly, Started Publication in 1984)

国际标准刊号：ISSN 1672-1454
国内统一刊号：CN 34-1221/O1

主　　管：中华人民共和国教育部
主　　办：大学数学课程教学指导委员会
（原数学与统计学教学指导委员会）
高等教育出版社有限公司
合肥工业大学
编　　辑：《大学数学》杂志编辑部
出版发行：大学数学杂志社
地　　址：合肥市屯溪路 193 号
激光照排：合肥劲松激光照排社
印　　刷：合肥市杏花印务股份有限公司
定　　价：15.00 元