

2012 6

# 大学数学

College

第二十八卷 VOL.28

# Mathematics

Daxue Shuxue

ISSN 1672-1454



9 771672 145009



# 大学数学

2012年12月

第28卷 第6期(总第163期)

## 目 录

教学  
改革

- 高等代数课程的教学改革..... 朱用文(1)
- 关于在概率统计课程中改进教学方法的若干思考..... 张 燕(5)
- 研究生“数值分析”精品课程建设与实践 ..... 涂俐兰(10)
- 关于21世纪数学类学生综合能力培养的思考..... 陈 刚(13)

专  
题  
研  
究

- 关于素数阶循环群中短序列的等价类(英文)..... 庄举娟,赵萍萍(17)
- G-凸空间中的KKM定理,匹配定理和截口定理(英文) ..... 郭彦华,郭伟平(20)
- 关于 $(k, h)$ -Fibonacci和 $(k, h)$ -Lucas数的置换因子循环矩阵的谱范数 .....  
..... 沈守强,岑建苗(25)
- Musiak-Orlicz序列空间的粗性 ..... 孙丽环(30)
- 关于奇摄动问题的对角化技巧 ..... 林苏榕(38)
- $L^p(E)$  ( $1 < p < \infty$ )的自反性的一个构造性证明 ..... 范亚静(43)
- 非单调算子方程组解的存在唯一性及其应用 ..... 刘春晗,王建国,王 鑫(47)
- 优势关系下决策表的下近似约简方法研究..... 廖毅强,桂现才(51)
- $n$ 维欧氏空间的等角变换 ..... 房喜明(56)
- 图同构的必要条件..... 谢乐平,熊艳清(60)
- 一类Dirichlet问题的多解存在性 ..... 王雄瑞(63)
- 矩阵方程 $AXA^T + BYB^T = C$ 的双对称最小二乘解及其最佳逼近 ..... 刘 莉,王 伟(67)
- 关于两种检验统计量为单峰分布时的最佳双边检验..... 刘瑞香,杨录胜(74)

数学  
建模

- 校园最佳游览路线问题的数学模型分析 ..... 廖川荣(78)
- 研究生数学建模教学方法分析..... 王宏洲,李炳照(83)

教  
学  
参  
考

- 二元Block-Basu型指数分布的独立性与不相关性 ..... 李国安,朱 翰(88)
- $n$ 阶常系数非齐次线性微分方程的降阶解法 ..... 刘 玲,苏 农(91)
- 随机变量变换分布的若干推论及其应用..... 宋明娟,朱思宇(96)
- 一个不等式的证明 ..... 刘长剑,汤正谊(100)
- 关于行列式计算的另类降阶法..... 邓 勇(102)
- 论实数的基本性质与求解存在性问题 ..... 丁宣浩,陈利霞(109)

向量组线性相关程度的研究·····	蒋福坤(114)
二元函数连续性条件之探析·····	曹慧珍(118)
关于空间解析几何的学术形态和教育形态·····	毛卫华,张胜祥,万安华(123)
HPM 视角下对傅里叶级数的教学设计·····	张永风(128)
高等数学课堂教学语言探究·····	黄燕平(135)
由一道高考数学题来看中学数学与大学数学衔接问题·····	郑婷婷(139)
一道美国大学生数学竞赛题的注记·····	李远华(142)
高等数学课堂教学中一题多解·····	张 莉,檀结庆,唐 烁,殷 明(144)
了解积分——分割的艺术·····	丁 韞,杨晓春(149)
如何成为一个合格的助课教师·····	高翔宇,王国强(156)

[期刊基本参数] CN 34-1221/O1 \* 1984 \* b \* A4 \* 160 \* zh+en \* P \* ¥15.00 \* 1200 \* 35 \* 2012-12

本期责任编辑:周 玲,禹春福,孟 勇

# 高等代数课程的教学改革

朱用文

(烟台大学 数学与信息科学学院, 烟台 264005)

[摘 要] 讨论高等代数的教学内容以及教学方法的改革问题, 介绍我们在实践中创立的立体教学法, 着重阐述俯察解析几何、仰观近世代数、联系数学分析以及半双语教学法四个基本方法.

[关键词] 高等代数; 教学改革; 近世代数; 解析几何; 数学分析; 半双语教学

[中图分类号] O151.2 [文献标识码] C [文章编号] 1672-1454(2012)06-0001-04

## 1 主要思想

数学本科专业基础课高等代数的教学内容以及教学方法的改革, 就我们烟台大学数学学院的经验来看, 主要包括该课程自身一些理论的更为恰当的形式, 该课程与其他课程的对接技巧, 双语教学技术在该课程中的融合等三个主要方面. 尤其注意这其中的对接技巧与融合技巧, 那是将有关的理论与技术巧妙地、有机地融合进高等代数的课堂教学中来, 而不是额外增加学时开销和学生的学习负担, 这就要求教师有较全面的素养、对于各相关课程以及整个课程体系有较透彻的了解、对于课程改革的操作方面在事先有着精确的设计和熟练的技术. 在这个改革中, 我们立足于高等代数<sup>[1]</sup>, 俯察解析几何<sup>[2]</sup>, 仰观近世代数<sup>[3,4]</sup>, 联系数学分析<sup>[5]</sup>, 左右有半双语教学相伴, 这样形成一种教学方法, 姑且称之为“立体教学法”.

该立体教学法有着重要的理论价值和实际意义. 它来自教学实践并直接在教学实践中不断得以完善, 理论研究与教学实践并行, 是人本主义学习论、建构主义学习论等现代教育理论的有益实践, 是面向现代化、面向未来、面向国际的现代教育观念的有效尝试. 对于提高高等代数这门课的教学水平和教学质量、对于数学学院所有相关系列课程的教学以及课程体系建设、对于学生树立数学大一统思想并提升学习能力与创新思维水平都有着十分重要的意义. 我们的“立体教学法”既独树一帜, 又可以经过适当推广后适用于高校大部分理科课程(特别是线性代数课程)的教学改革.

以上就是高等代数之立体教学法的主要思想. 为了大家理解得稍微详细一些, 以下着重阐述俯察解析几何、仰观近世代数、联系数学分析以及半双语教学法四个基本方法.

## 2 仰观法

首先谈仰观抽象代数的问题. 这个问题对于学生的思维能够在不久的将来比较顺利地上升到抽象代数的高度以及对于现时理解高等代数中的有关具体内容都是有益的.

线性空间的概念中包含群与模的概念. 线性空间的定义包含八条公理, 其中前四条就是交换群的定义. 如果将数域换成一般的含么环, 那么这八条就是么作用模的定义了. 简单地讲, 线性空间是一种特殊

的模,而后者是前者的推广.

保持代数运算的映射就是同态,双射的同态就是同构.同态与同构,是抽象代数的两个非常重要而基本的概念,由此可以将高等代数中的线性映射、线性变换、线性同构、线性函数等概念全部统一起来.因为它们都是线性空间之间的同态,其中线性同构是一般同构在线性空间这个代数系统上的体现.

在讲多项式的运算、矩阵的运算以及线性变换的运算的时候,可以不失时机地介绍环、代数等抽象概念,因为一个域  $K$  上的多项式全体  $K[x]$  按照普通的加法、乘法运算的确构成一个环;自然地定义数量乘法之后,这当然也构成一个代数,可以称为多项式代数.类似地,有全矩阵环、全矩阵代数、全线性变换环、全线性变换代数.而且还可以指出,域  $K$  上全矩阵环与全矩阵代数  $M_n(K)$  分别同构于  $n$  维线性空间  $V$  上的全线性变换环与全线性变换代数  $GL(V)$ .

关于线性变换有一个重要结果,就是其零度与秩之和等于空间的维数.可以用抽象代数中的同构基本定理来证明这个结论,同时可以顺便介绍商空间的概念.用环论中几乎类似的方法,还可以证明任意一个方阵或者线性变换的最小多项式的存在性.至于一个方阵或者线性变换以其不变因子组作为一组不变量的结论,也可以找到模论的证明.这些内容都是可以有所选择地在课堂上适当地加以介绍的.

### 3 俯察法

现在谈俯察解析几何的方法.这种俯察的好处首先在于,在很多时候,几何直观对于理解抽象概念是很有帮助的.

通过正交变换将矩阵化为对角形的问题是高等代数最为重要的问题,而将二次曲线或者二次曲面的一般方程化成标准方程的问题是解析几何最为主要的任务.然而这两个问题实际上是统一的.

线性空间的坐标变换公式与几何里的坐标变换公式也是统一的.

由向量的内积与外积可以定义混合积.混合积的计算可以归结为三级行列式的计算.由此知道,体积可以通过三级行列式来计算.面积可以看作单位高度的柱体的体积,由此可以推出面积实际上也可以通过三级行列式来计算;但该三级行列式可以迅速简成一个二级行列式.由此我们清楚地看到了行列式的几何意义,各级行列式实际上就是该维度下的一种度量.

解线性方程组的克莱姆法则,在三个未知元的情形下,可以通过混合积给出极为简洁的证明.

线性变换、线性相关、线性无关,特别是特征值、特征向量、特征子空间以及对角化等概念,通通都可以通过几何上的例子来很好地加以说明.例如,三维物理空间中(建立直角坐标系后)向一个(过原点的)固定平面的投影变换被自然地看成一个线性变换时,该平面是一个二维的特征子空间,对应于特征值 1;该平面(过原点的)法线是一个一维的特征子空间,对应于特征值 0.由于两个特征子空间的维数和等于全空间的维数 3,因此,该变换可以对角化.可以类似地考虑向一条固定直线的投影以及关于一个固定平面的反射,等等.要特别注意,物理空间中或者平面上位移不等于 0 的平移不是线性变换.这样的一些来自几何的例子能够极大地提高学生学高等代数的兴趣并加深他们对于抽象内容的直观理解.

有时候也可以将高等代数的方法或技巧运用到几何中去.例如,仿射变换保持线段分比的问题,可以通过线性变换或者矩阵的技巧给出十分简洁的证明.

### 4 联系法

联系法是一个普遍有效的方法.高等代数课程内部各部分内容之间有着十分内在的联系,如[6]中谈到以线性方程组为中心展开线性代数课程的教学.我们看到,用矩阵统一课程内容也是十分有效的.以上介绍的俯察法、仰观法,实际上也就是高等代数课程与解析几何、近世代数等课程的联系.现在以矩阵在数学分析的极值问题中的应用为例,说明高等代数与数学分析这两门课程的互相渗透问题,这对于学生提高学习这两门课的兴趣都有一定的意义.

可以用区间上的连续函数、可积函数等来构成线性空间. 可以将不定积分、导数等看成适当空间上的线性变换. 可以考虑某个数字矩阵的问题时通常可以研究其特征矩阵, 而将后者看成关于变元的函数后容易使用连续函数、极限、中值定理等数学分析手段. 以下内容可以参看[7],[8]. 不过在这里我们将采用不同的但是更为简洁的证明方法, 以便让人们从中体察二次型、正定矩阵等代数内容在数学分析中的作用.

设  $n$  元函数  $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  点具有二阶连续偏导数, 又  $\text{grad } f(P_0) = 0$ . 记  $H = (f_{x_i x_j}(P_0))_{n \times n}$ . 考虑适当选取  $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ , 使得  $P = P_0 \pm \Delta P$  落在函数定义域内. 令

$$\begin{aligned} F(t) &= f(P_0 + t\Delta P) - f(P_0) \\ &= f(x_1^0 + t\Delta x_1, \dots, x_n^0 + t\Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0), \quad -1 \leq t \leq 1, \\ F'(0) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{P_0} \Delta x_1 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{P_0} \Delta x_n = 0, \\ F''(0) &= (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) H (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^T. \end{aligned}$$

最后一式的右端可以看成关于  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  的二次型  $g$ .

(i) 当  $H$  是正定矩阵时,  $g$  是正定二次型, 从而  $F''(0) > 0$ . 由一元函数的极值定理得到  $F(t)$  在  $t = 0$  点取得极小值 0, 故对于任意的  $t \in [-1, 1], t \neq 0$  有  $F(t) > 0$ , 即  $f(P_0 + t\Delta P) > f(P_0)$  成立. 可见此时  $f$  在  $P_0$  点取得极小值.

(ii) 当  $H$  是负定矩阵时,  $g$  是负定二次型, 从而  $F''(0) < 0$ . 由一元函数的极值定理得到  $F(t)$  在  $t = 0$  点取得极大值 0, 故对于任意的  $t \in [-1, 1], t \neq 0$  有  $F(t) < 0$ , 即  $f(P_0 + t\Delta P) < f(P_0)$  成立. 可见此时  $f$  在  $P_0$  点取得极大值.

## 5 半双语教学法

该方法实际上就是专业英语与业务课程的结合问题, 其要点是不增加额外的课时开销而是让学生在学高等代数课程的同时就学习了相应的专业英语. 具体来说我们是怎么做的呢?

在高等代数的教学实践中, 我们尝试在课堂上适时地介绍有关专业名词的英文翻译, 在估计学生理解数学内容不困难的时候适当地使用英文板书, 指导学生在课外适当阅读相关的英文文献, 如 Elsevier Science 出版的《Linear algebra and its application》. 此外, 在毕业论文阶段, 我们要求部分学生阅读比较深入一些的数学专业的英语文献, 在指导学生毕业论文时严格要求其英文摘要的翻译. 当然, 如果有可能, 增加少量课外使用英文或双语的数学讲座也是可以尝试的方式. 要求学生在课外观看国外网络公开课, 如麻省理工学院教授 Gilbert Strang 主讲的《Linear Algebra》.

如果数学分析等课程也同样采用半双语教学法, 那么学生到了三年级的时候就可以自行阅读广泛一些的外文数学文献. 如此一来, 就可以省略掉数学学院大学专业英语这门课程了.

### [参 考 文 献]

- [1] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 3版. 王萼芳, 石生明修订. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [2] 丘维声. 解析几何[M]. 北京: 北京大学出版社, 1988.
- [3] Hungerford T W. 代数学[M]. 冯克勤译. 长沙: 湖南教育出版社, 1985.
- [4] Jacobson N. Lectures in abstract algebra II, linear algebra[M]. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [5] 陈传璋等. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [6] 何立国, 施武杰. 以线性方程组为中心展开线性代数课程的教学[J]. 大学数学, 2009, 25(6): 203-206.
- [7] 董丽华. 利用正定矩阵法解决多元函数的极值问题[J]. 连云港职业技术学院学报, 2006, 19(3): 59-60. <http://www.cnki.net>
- [8] 朱用文, 王燕, 侯汝臣. 正定矩阵在函数极值问题中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(21): 249-250.

## Reform of Higher Algebra

*ZHU Yong-wen*

(School of Mathematics and Information Science, Yantai University, Yantai 264005, China)

**Abstract:** We discuss the reform of the teaching contents and methods of the higher algebra, introduce the three-dimensional teaching method, which established by us in our teaching practice, emphatically illustrate four basic methods: The first one is looking down the analytic geometry, and the second is looking up the modern algebra, the third is to connect with mathematical analysis, and the last one is semi-bilingual teaching method.

**Key words:** higher algebra; teaching reform; modern algebra; analytic geometry; mathematical analysis; semi-bilingual teaching



主 编：苏化明  
副 主 编：潘 杰  
编辑部主任：周 玲

\*

**Chief Editor:** SU Hua-ming

**Deputy Chief Editor:** PAN Jie

**Chairman of Editorial Board:** ZHOU Ling

## 大学数学

(双月刊·1984年创刊)  
2012年第28卷第6期  
(总第163期)

\*

College Mathematics  
Vol.28, No.6, Dec.2012  
(General Serial No.163)

(Bimonthly, Started Publication in 1984)

---

主 管：教育部  
主 办：教育部数学与统计学教学指导委员会  
高等教育出版社  
合肥工业大学  
编 辑：《大学数学》杂志编辑部  
出版发行：大学数学杂志社  
地 址：合肥市屯溪路193号  
激光照排：合肥劲松激光照排社  
印 刷：合肥市杏花印务股份有限公司  
定 价：15.00元

---

国际标准刊号：ISSN 1672-1454

国内统一刊号：CN 34-1221/O1