烟台大学学报

自然科学与工程版

JOURNAL OF YANTAI UNIVERSITY

Natural Science and Engineering Edition

3

2019

第32卷 Vol.32

ISSN 1004-8820

07>

9 771004 882190

烟台大学学报（自然科学与工程版）

2019 年 7 月　第 32 卷　第 3 期

YANTAI DAXUE XUEBAO　（ZIRAN KEXUE YU GONGCHENG BAN）

［期刊基本参数］　CN 37 - 1213/N* 1988* q* A4* 104* zh* P* ￥10.00* 1000* 16* 2019 - 07

目　　次

标签带噪声数据的重加权半监督分类方法 …………………………………… 陈　倩，杨　旻，魏鹏飞(205)

泛函积分中值定理“中间点”的渐近性 …………………………………… 张芯语，张树义，聂　辉(210)

非中心奇异 Wishart 分布的特征函数 ………………………………………………… 李　斐，李　琴(214)

盐酸 d3 - Poziotinib 的设计合成及体外肝微粒体稳定性研究

…………………………………………………… 邵明莎，马术超，彭祥福，白信法，张少云，姚　雷(220)

阳离子水性聚氨酯湿摩擦提升剂的制备及应用

…………………………………………… 魏范梅，李　霞，苏梓林，聂　雯，李晓通，曾　涛，刘振波(226)

$^{13}C_6$ - 酪氨酸标记的蛋清溶菌酶的表达及 NMR 测定 ………………………… 王瑞英，余　飞，刘万卉(233)

海生红藻多管藻中 2 种 R - 藻红蛋白的分离与分析 ………………… 刁海平，侯翠英，赵明日，孙　力(238)

不同产地洋金花的质量评价及提取方法对东莨菪碱提取产率的影响

……………………… 李丹娜，王丽莹，牟晓凤，刘　攀，柳亚男，李　涛，孙晓燕，王　军，赵　烽(246)

阿柏西普类似药电荷异构体的药代动力学研究 …… 安　红，刘万卉，沈振铎，沙春洁，杨博璐，赵燕燕(250)

丹酚酸 A 与泼尼松联合治疗大鼠微小病变型肾病的协同增效作用

…………………………………… 王学凯，李　新，冀　凯，刘　悦，杜世豪，岳　光，齐　栋，范华英(255)

茶溴香酰胺脂质体对黑色素瘤细胞生长和迁移的抑制作用

…………………………………………… 张　欣，张伟伟，张　燕，石晓玉，孙紫薇，刘　昆，张国营(262)

数控电路板性能退化分析及可靠性统计推断研究 …………………………………………… 解传宁(271)

偏向自适应区间模糊 C 均值的遥感地物分类方法 ……………………… 冯国政，徐金江，范宝德，赵甜雨(277)

无线电监测数据可视化平台的设计与实现 ………… 段晓莉，崔晋华，施　洋，李　超，钱　俊，金维有(282)

内置加劲环 T 型管节点抗冲击承载力分析 …………………………………… 高　康，曲　慧，丛静岚(292)

应用技术

基于 Petri 网的 MES 系统形式化建模 ………………………………………… 邹佳霖，范宝德，韩兆玉(298)

JOURNAL OF YANTAI UNIVERSITY

(NATURAL SCIENCE AND ENGINEERING) Vol. 32 No. 3 July 2019

CONTENTS

Reweighting Semi-Supervised Classification for Noisy Labels …… *CHEN Qian, YANG Min, WEI Peng-fei* (205)

Asymptotic Behavior of the "Intermediate Point" for Functional Integrals Mean Value Theorem …… *ZHANG Xin-yu, ZHANG Shu-yi, NIE Hui* (210)

Characteristic Function of Non-Central Singular Wishart Distribution …… *LI Fei, LI Qin* (214)

Synthesis of *d*3-Poziotinib Hydrochloride and Stability of Liver Microsomes *in vitro* …… *SHAO Ming-sha, MA Shu-chao, PENG Xiang-fu, BAI Xin-fa, ZHANG Shao-yun, YAO Lei* (220)

Synthesis and Properties of Cationic Waterborne Polyurethane Wet Rubbing Fastness Improver …… *WEI Fan-mei, LI Xia, SU Zi-lin, NIE Wen, LI Xiao-tong, ZENG Tao, LIU Zhen-bo* (226)

Expression of $^{13}C_6$-Tyrosine-Labeled Hen-Egg-White Lysozyme in *E. Coli* and Its NMR Determination …… *WANG Rui-ying, YU Fei, LIU Wan-hui* (233)

Isolation and Analysis of Two R-phycoerythrins from Marine Red Alga *Polysiphonia urceolata* …… *DIAO Hai-ping, HOU Cui-ying, ZHAO Ming-ri, SUN Li* (238)

Quality Evaluation of Daturae Flos from Different Producing Areas and Effects of Extraction Methods on Extraction Yield of Scopolamine …… *LI Dan-na, WANG Li-ying, MOU Xiao-feng, LIU Pan, LIU Ya-nan, LIU Pan, LI Tao, SUN Xiao-yan, WANG Jun, ZHAO Feng* (246)

Pharmacokinetic Study of Charge Variants of an Aflibercept Biosimilar …… *AN Hong, LIU Wan-hui, SHEN Zhen-duo, SHA Chun-jie, YANG Bo-lu, ZHAO Yan-yan* (250)

Synergistic Effect of Salvianolic Acid A Combined with Low-dose Prednisone on Minimal Change Disease in Rats …… *WANG Xue-kai, LI Xin, JI Kai, DU Shi-hao, YUE Guang, QI Dong, FAN Hua-ying* (255)

Inhibitory Effect of TBrC-L on Melanoma Cell Growth and Migration …… *ZHANG Xin, ZHANG Wei-wei, ZHANG Yan, SHI Xiao-yu, SUN Zi-wei, LIU Kun, ZHANG Guo-ying* (262)

Study on Performance Degradation Analysis and Reliability Statistical Inference of NC Circuit Board …… *XIE Chuan-ning* (271)

Remote Sensing Classification Method Based on Preferential Adaptive Interval-Value Fuzzy C-Means …… *FENG Guo-zheng, XU Jin-jiang, FAN Bao-de, ZHAO Tian-yu* (277)

Design and Implementation of Radio Monitoring Data Visualization Platform …… *DUAN Xiao-li, CUI Jin-hua, SHI Yang, LI Chao, QIAN Jun, JIN Wei-you* (282)

Analysis of Bearing Capacity of Stiffening Rings Reinforced Tubular T-joint Under Impact Loading …… *GAO Kang, QU Hui, CONG Jing-lan* (292)

Applied Techniques

Formal Modeling of MES System Based on Petri Net …… *ZOU Jia-lin, FAN Bao-de, HAN Zhao-yu* (298)

第 32 卷第 3 期 烟台大学学报(自然科学与工程版) Vol. 32 No. 3
2019 年 7 月 Journal of Yantai University (Natural Science and Engineering Edition) Jul. 2019

文章编号:1004-8820(2019)03-0214-06 doi:10.13951/j.cnki.37-1213/n.2019.03.003

非中心奇异 Wishart 分布的特征函数

李 斐,李 琴

(烟台大学数学与信息科学学院,山东 烟台 264005)

摘要: 利用奇异值分解,以及非中心卡方分布的特征函数给出了非中心奇异 Wishart 分布的特征函数. 将 Wishart 分布的一个重要性质推广到了奇异非中心的情况下,并用特征函数加以证明.

关键词: 非中心奇异 Wishart 分布; 奇异正态分布; 特征函数

中图分类号: O212.4 **文献标志码:** A

文献[1-2]中讨论了非奇异多元正态矩阵和非奇异 Wishart 矩阵的密度函数、特征函数以及其他一些重要性质. UHLIG[3]将 Wishart 分布推广到了奇异的情况,给出了奇异 Wishart 分布的密度函数等. DIAZ-GARCIA 等在文献[4]中进一步推广和完善了 UHLIG 的结果,给出了更一般情况下的奇异 Wishart 分布的密度函数. 更多的相关结果可以参阅文献[5-7].

文献[1-2]给出了非奇异的 Wishart 矩阵的特征函数,其中文献[2]也给出了非奇异非中心的 Wishart 矩阵的特征函数. 但是对于最复杂的奇异非中心 Wishart 分布的特征函数并没有讨论. 本文不但给出了奇异非中心 Wishart 分布的特征函数,还将 Wishart 分布的一个重要性质推广到了奇异非中心的情况下,并用特征函数加以证明.

1 奇异非中心 Wishart 分布的特征函数

由文献[2]中矩阵正态分布的定义,易知若 $Y_{r\times s} \sim N(\boldsymbol{O},\boldsymbol{I}_{s\times s},\boldsymbol{I}_{r\times r})$,即 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y}') \sim N_{rs}(\boldsymbol{O},\boldsymbol{I}_{r\times r}\otimes\boldsymbol{I}_{s\times s})$. 令

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{AYB}',$$

其中 $\boldsymbol{A}_{n\times r}$,$\boldsymbol{B}_{m\times s}$ 为列满秩矩阵. 则不难得到

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}') = \mathrm{vec}(\boldsymbol{M}') + \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\,\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y}') \sim N_{mn}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{M}'),\boldsymbol{AA}'\otimes\boldsymbol{BB}'),$$

即 $\boldsymbol{X} \sim N_{n\times m}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Theta})$. 其中 $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{AA}'$,$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{BB}'$,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) = s$,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Theta}) = r$. 当 $\boldsymbol{\Sigma}$,$\boldsymbol{\Theta}$ 为奇异矩阵时,称 X 服从奇异的正态分布.

文献[3]将 Wishart 分布推广到了 $n < m$ 的情况,称之为奇异 Wishart 分布. 文献[4]考虑了所有可能的情况,给出了非中心奇异 Wishart 分布的定义如下,

定义 1 若 $X \sim N_{n\times m}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Theta})$,其中 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) = s$,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Theta}) = r$. 令

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{X},$$

则 S 服从奇异非中心 Wishart 分布,记为

$$\boldsymbol{S} \sim \boldsymbol{W}_m^q(r,\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Omega}).$$

收稿日期: 2018-08-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61503318);山东省高校科研计划项目(J13LI06).

作者简介: 李斐(1982-),女,山东烟台人,讲师,博士,研究方向为多元统计方向.

其中 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Sigma}^- \boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^- \boldsymbol{M}$, $q = \min(r,s)$.

下述定理给出了 S 的特征函数.

定理 1　若 $\boldsymbol{X} \sim N_{n\times m}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Theta})$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) = s$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\Theta}) = r$, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Theta}^- \boldsymbol{X} \sim W_m^l(r,\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Omega})$. 其中 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Sigma}^- \boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^- \boldsymbol{M}$, $l = \min(r,s)$. 则 S 的特征函数为

$$\Phi_S(\boldsymbol{\Gamma}) = (\det(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}))^{-\frac{r}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^-(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^-\boldsymbol{M})} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^-\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^-\boldsymbol{M})} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{tr}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Sigma}^-\boldsymbol{\Sigma})\Gamma(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^-)\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^-\boldsymbol{M})}, \tag{1}$$

即为

$$\Phi_S(\boldsymbol{\Gamma}) = (\det(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}))^{-\frac{r}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^-(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\Sigma\Gamma M'\Theta^-M)} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{tr}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Sigma}^-\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^-)\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^-\boldsymbol{M})}. \tag{2}$$

证明　对 Σ,$\boldsymbol{\Theta}$ 做特征值分解如下,

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_\Theta & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}' = (\boldsymbol{P}_1 \quad \boldsymbol{P}_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_\Theta & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1' \\ \boldsymbol{P}_2' \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{D}_\Theta\boldsymbol{P}_1',$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_\Sigma & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}' = (\boldsymbol{Q}_1 \quad \boldsymbol{Q}_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_\Sigma & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1' \\ \boldsymbol{Q}_2' \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_\Sigma\boldsymbol{Q}_1',$$

其中 $\boldsymbol{D}_\Theta$,$\boldsymbol{D}_\Sigma$ 分别为 $r\times r$,$s\times s$ 阶的对角矩阵,对角元素为 $\boldsymbol{\Theta}$,$\boldsymbol{\Sigma}$ 的非零特征值. $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$ 分别为 $n\times n$,$m\times m$ 阶的正交矩阵.

令

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D}_\Theta^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{P}_1'\boldsymbol{X} = (z_1, z_2, \cdots, z_r)',$$

则 $\boldsymbol{Z} \sim N_{r\times m}(\widetilde{\boldsymbol{M}},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{I})$, $z_i \sim N_m(\widetilde{m}_i,\boldsymbol{\Sigma})$, $i = 1,\cdots,r$. 其中

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{D}_\Theta^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{P}_1'\boldsymbol{M} = (\widetilde{m}_1,\cdots,\widetilde{m}_r)'. \tag{3}$$

注意到 Z 为奇异正态分布,根据文献[2]的定理2.1可以得到 Z 的密度函数表达式以及下式,

$$\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i\,(a.\,s.). \tag{4}$$

因为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Theta}^- \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}' = \sum_{i=1}^{r} z_i z_i',$$

采用文献[1]中对 Wishart 分布矩阵的特征函数的定义,注意到 $z_1,\cdots,z_r$ 相互独立,有

$$\Phi_S(\boldsymbol{\Gamma}) = E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{tr}(S\Gamma)} = E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{tr}(\sum_{i=1}^{r} z_i z_i'\Gamma)} = \prod_{i=1}^{r} E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}z_i'\Gamma z_i}, \tag{5}$$

故问题转化为 求 $E\mathrm{e}^{\frac{i}{2}z_i'\Gamma z_i}$. 指数部分可化简为:

$$\begin{aligned} & z_i'\boldsymbol{\Gamma}z_i = z_i'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}'z_i = \\ & z_i'(\boldsymbol{Q}_1 \quad \boldsymbol{Q}_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1' \\ \boldsymbol{Q}_2' \end{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Q}_1 \quad \boldsymbol{Q}_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1' \\ \boldsymbol{Q}_2' \end{pmatrix}z_i = \\ & (z_i'\boldsymbol{Q}_1 \quad \widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1'z_i \\ \boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i \end{pmatrix} = \\ & z_i'\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_1'z_i + 2\widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_1'z_i + \widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i. \end{aligned} \tag{6}$$

其中第二个等号用到了式(4). 令 $\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{D}_\Sigma^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_\Sigma^{\frac{1}{2}}$,将 $\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}$ 进行特征值分解,

$$\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{H}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{\widetilde{\Gamma}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{H}' = (\boldsymbol{H}_1 \quad \boldsymbol{H}_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{\widetilde{\Gamma}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_1' \\ \boldsymbol{H}_2' \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其 中 $\boldsymbol{D}_{\widetilde{\Gamma}} = \operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_q)$ 为 $q\times q$ 阶的对角矩阵,对角元素为 $\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}$ 的非零特征值. H 为 $m\times m$ 阶 的正交矩阵.

再令

$$\tilde{z}_i = \boldsymbol{H}'\boldsymbol{D}_\Sigma^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}'z_i, \tag{8}$$

则 $\tilde{z}_i \sim N_s(\hat{m}_i,\boldsymbol{I}_{s\times s})$, 其中:

$$\hat{m}_i = \boldsymbol{H}'\boldsymbol{D}_\Sigma^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}'\widetilde{m}_i. \tag{9}$$

将式(7),式(8)代入式(6)中,可得,

$$
\begin{aligned}
z_i'\boldsymbol{\Gamma}z_i = {} & \tilde{z}_i'\boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}\boldsymbol{H}\tilde{z}_i + 2\widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}\tilde{z}_i + \widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i = \\
& \tilde{z}_i'\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{\tilde{\Gamma}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\tilde{z}_i + 2\widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}\tilde{z}_i + \widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i = \\
& \sum_{j=1}^{q}\lambda_j\tilde{z}_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{s}2\phi_{ij}\tilde{z}_{ij} + \widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i = \\
& \sum_{j=1}^{q}(\lambda_j\tilde{z}_{ij}^2 + 2\phi_{ij}\tilde{z}_{ij}) + \sum_{j=q+1}^{s}2\phi_{ij}\tilde{z}_{ij} + \widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i,
\end{aligned} \tag{10}
$$

其中 $\tilde{z}_i = (\tilde{z}_{i1},\cdots,\tilde{z}_{is})'$，$\hat{m}_i = (\hat{m}_{i1},\cdots,\hat{m}_{is})'$，$f_i' = \widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$，$f_i = (\phi_{i1},\cdots,\phi_{is})'$. $\tilde{z}_{ij} \sim N(\hat{m}_{ij},1)$，$i = 1,\cdots,r$，$j = 1,\cdots,s$.

易知式(10)**的前两部分相互独立，第三部分几乎处处为常数，将式**(10)**代入式**(5)**可得，**

$$
\Phi_S(\boldsymbol{\Gamma}) = \prod_{i=1}^{r}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i}E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{q}(\lambda_j\tilde{z}_{ij}^2+2\varphi_{ij}\tilde{z}_{ij})}E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=q+1}^{s}2\varphi_{ij}\tilde{z}_{ij}}\right). \tag{11}
$$

分别计算式(11)**中的** 2 **个期望，对于第一个期望化简如下，因为**

$$
E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{q}(\lambda_j\tilde{z}_{ij}^2+2\phi_{ij}\tilde{z}_{ij})} = \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\phi_{ij}^2}{2\lambda_j}}E\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2}(\tilde{z}_{ij}+\frac{\phi_{ij}}{\lambda_j})^2}, \tag{12}
$$

注意到 $\tilde{z}_{ij} + \dfrac{\phi_{ij}}{\lambda_j} \sim N\left(\hat{m}_{ij} + \dfrac{\phi_{ij}}{\lambda_j},1\right)$，**故**

$$
(\tilde{z}_{ij} + \frac{\phi_{ij}}{\lambda_j})^2 \sim \chi^2(1,\delta_{ij}),
$$

其中非中心参数

$$
\delta_{ij} = (\hat{m}_{ij} + \frac{\phi_{ij}}{\lambda_j})^2. \tag{13}
$$

由非中心卡方分布的特征函数，式(12)**可进一步整理，**

$$
\begin{aligned}
E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{q}(\lambda_j\tilde{z}_{ij}^2+2\phi_{ij}\tilde{z}_{ij})} &= \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\phi_{ij}^2}{2\lambda_j}}\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\delta_{ij}}\prod_{j=1}^{q}(1-\mathrm{i}\lambda_j)^{-\frac{1}{2}} = \\
& \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\phi_{ij}^2}{2\lambda_j}}\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\delta_{ij}}\left(\det\left(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{\tilde{\Gamma}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \\
& \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\phi_{ij}^2}{2\lambda_j}}\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\delta_{ij}}(\det(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}))^{-\frac{1}{2}} = \\
& \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\phi_{ij}^2}{2\lambda_j}}\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\delta_{ij}}(\det(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}))^{-\frac{1}{2}} = \\
& \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\phi_{ij}^2}{2\lambda_j}}\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\delta_{ij}}(\det(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}))^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

计算式(11)**中的第二个期望，**

$$
\begin{aligned}
E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=q+1}^{s}2\phi_{ij}\tilde{z}_{ij}} &= \prod_{j=q+1}^{s}E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{ij}\tilde{z}_{ij}} = \prod_{j=q+1}^{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{ij}\hat{m}_{ij}-\frac{1}{2}\phi_{ij}^2} = \\
& \mathrm{e}^{\sum_{j=q+1}^{s}\mathrm{i}\phi_{ij}\hat{m}_{ij}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=q+1}^{s}\phi_{ij}^2}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

令 $\lambda_{q+1} = \lambda_{q+2} = \cdots = \lambda_s = 0$，**则** $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{H}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_q,\lambda_{q+1},\cdots,\lambda_s)\boldsymbol{H}'$. **再结合式**(13)，(14)，(15)，(11)**可整理化简得**

$$
\begin{aligned}
\Phi_S(\boldsymbol{\Gamma}) &= \prod_{i=1}^{r}E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}z_i'\boldsymbol{\Gamma}z_i} = \\
& \prod_{i=1}^{r}\left(\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\delta_{ij}}(\det(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}))^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{q}\frac{\mathrm{i}\phi_{ij}^2}{2\lambda_j}}\mathrm{e}^{\sum_{j=q+1}^{s}\mathrm{i}\phi_{ij}\hat{m}_{ij}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=q+1}^{s}\phi_{ij}^2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i}\right) = \\
& \prod_{i=1}^{r}\left((\det(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}))^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{s}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\hat{m}_{ij}^2}\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{s}\frac{\mathrm{i}\hat{m}_{ij}\phi_{ij}}{(1-\mathrm{i}\lambda_j)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\frac{\phi_{ij}^2}{1-\mathrm{i}\lambda_j}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i}\right) = \\
& (\det(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}))^{-\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\hat{m}_{ij}^2}\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\mathrm{i}\hat{m}_{ij}\phi_{ij}}{(1-\mathrm{i}\lambda_j)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\phi_{ij}^2}{1-\mathrm{i}\lambda_j}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{r}\widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

由式(9)得

$$\hat{\boldsymbol{M}} = (\hat{m}_1, \cdots, \hat{m}_r)' = \widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \hat{m}_{11} & \cdots & \hat{m}_{1s} \\ & \cdots & \\ \hat{m}_{r1} & \cdots & \hat{m}_{rs} \end{pmatrix}$$

以及式(3)，将式(16)的第一个指数函数的指数部分化简如下，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\hat{m}_{ij}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(1-\mathrm{i}\lambda_j)}\hat{m}_{ij}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\hat{m}_{ij}^2 = \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\hat{m}_i'\left(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Gamma}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right)^{-1}\hat{m}_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\hat{m}_i'\hat{m}_i = \\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\hat{\boldsymbol{M}}\left(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Gamma}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right)^{-1}\hat{\boldsymbol{M}}'\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\widetilde{m}_i'\boldsymbol{\Sigma}^{-}\widetilde{m}_i = \\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}})^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}_1'\widetilde{\boldsymbol{M}}'\right) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-}\widetilde{\boldsymbol{M}}'\widetilde{\boldsymbol{M}}) = \\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{\Sigma} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-}\widetilde{\boldsymbol{M}}'\widetilde{\boldsymbol{M}}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-}\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M}) = \\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-}(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-}\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M}).
\end{aligned} \tag{17}$$

式(16)的第二个指数函数的指数部分化简如下，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\mathrm{i}\hat{m}_{ij}\phi_{ij}}{(1-\mathrm{i}\lambda_j)} = \mathrm{i}\sum_{i=1}^{r}\hat{m}_i'\left(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Gamma}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right)^{-1}f_i = \\
&\mathrm{itr}\left(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Gamma}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}'\right) = \\
&\mathrm{itr}\left(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Gamma}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}'\right) = \\
&\mathrm{itr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') = \\
&-\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-}(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') + \mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') = \\
&-\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-}(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') + \mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{-}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') = \\
&-\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\Sigma}^{-}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') + \mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{-}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

式(16)的第三个指数函数的指数部分化简如下，

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\phi_{ij}^2}{1-\mathrm{i}\lambda_j} = \\
&\mathrm{itr}\left(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Gamma}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}'\right) = \\
&\mathrm{itr}\left(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Gamma}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{Q}_1'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}'\right) = \\
&\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') = \\
&\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'(\boldsymbol{\Sigma} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') - \mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{\Sigma} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') = \\
&\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Sigma}^{-}(\boldsymbol{I} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') - \mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

式(16)的第四个指数函数的指数部分化简如下，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{r}\widetilde{m}_i'\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{m}_i = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2'\widetilde{\boldsymbol{M}}') = \\
&\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Sigma}^{-}\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{-})\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M}).
\end{aligned} \tag{20}$$

将式(17)—(20)代入式(16)可得式(1)，进一步化简为式(2)，故定理得证.

当 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{S}$ 即为中心的奇异 Wishart 分布，由定理 2 可得其特征函数.

推论1 若 $X\sim N_{n\times m}(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Theta})$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma})=s$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Theta})=r$，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{X}\sim W_m^l(r,\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{0})$. 则 S 的特征函数为

$$\Phi_S(\boldsymbol{\Gamma})=(\det(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma\Sigma}))^{-\frac{r}{2}}.$$

当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma})=m$ 时，即 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为非奇异矩阵，由定理2可得其特征函数.

推论2 若 $X\sim N_{n\times m}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Theta})$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma})=m$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Theta})=r$，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{X}\sim W_m^l(r,\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Omega})$，$l=\min(r,m)$. 则 S 的特征函数为

$$\Phi_S(\boldsymbol{\Gamma})=(\det(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma\Sigma}))^{-\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma\Sigma})^{-1}\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M})}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M})}.$$

推论4的结论与文献[3]中的相关结果是一致的.

2 应 用

我们将文献[1]的定理3.2.5推广到奇异非中心的情况下，并利用定理2进行证明.

定理2 若 $S\sim W_m^l(r,\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Omega})$，其中 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M}$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma})=s$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Theta})=r$，$l=\min(r,s)$，则

$$\boldsymbol{ASA}'\sim W_p^{\tilde{l}}(r,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}},\tilde{\boldsymbol{\Omega}}),\tag{21}$$

其中 A 为 $p\times m$ 阶的矩阵，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}=\boldsymbol{A\Sigma A}'$，$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}=\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-}\boldsymbol{AM}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{MA}'$，$\tilde{l}=\min(r,\mathrm{rank}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}))$.

证明 分以下3种情况讨论:

(1) 当 A 为 $p\times p$ 阶正交矩阵时，由定理1，

$$\begin{aligned}&\Phi_{ASA'}(\boldsymbol{\Gamma})=E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{ASA}'\boldsymbol{\Gamma})}=E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{SA}'\boldsymbol{\Gamma A})}=\\&(\det(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Gamma A\Sigma}))^{-\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-}(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma A}'\boldsymbol{\Gamma A})^{-1}\boldsymbol{\Sigma A}'\boldsymbol{\Gamma AM}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M})}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Sigma\Sigma}^{-})\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Gamma A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Sigma\Sigma}^{-})\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M})}=\\&(\det(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma A\Sigma A}'))^{-\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{A\Sigma A}')^{-}(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma A}'\boldsymbol{\Gamma A})^{-1}\boldsymbol{A\Sigma A}'\boldsymbol{\Gamma AM}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{MA}')}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A\Sigma A}')(\boldsymbol{A\Sigma A}')^{-})\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A\Sigma A}')(\boldsymbol{A\Sigma A}')^{-})\boldsymbol{AM}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{MA}')},\end{aligned}$$

故式(21)成立.

(2) 当 A 为形如 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{c\times c}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$ 的 $n\times m$ 阶的对角矩阵时，其中 $\boldsymbol{\Lambda}_{c\times c}$ 为对角线元素非零的对角矩阵，则有

$$\begin{aligned}&\Phi_{ASA'}(\boldsymbol{\Gamma})=E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{ASA}'\boldsymbol{\Gamma})}=E\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{SA}'\boldsymbol{\Gamma A})}=\\&(\det(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}))^{-\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}^{-}\left(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}&0\\0&0\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}&0\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M}\right)}\times\\&\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{I}-\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}^{-}\right)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}&0\\0&0\end{pmatrix}\left(\boldsymbol{I}-\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}^{-}\right)\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M}\right)}=\\&(\det(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}))^{-\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}^{-}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}&0\\\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1'\\M_2'\end{pmatrix}\boldsymbol{\Theta}^{-}(M_1\ \ M_2)\right)}\times\\&\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{I}-\begin{pmatrix}\Sigma_{11}\Sigma_{11}^{-}&0\\0&\Sigma_{22\cdot1}\Sigma_{22\cdot1}^{-}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}&0\\0&0\end{pmatrix}\left(\boldsymbol{I}-\begin{pmatrix}\Sigma_{11}\Sigma_{11}^{-}&0\\0&\Sigma_{22\cdot1}\Sigma_{22\cdot1}^{-}\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{M}\right)}=\\&(\det(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}))^{-\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_{11}^{-}(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}M_1'\boldsymbol{\Theta}^{-}M_1)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{I}-\Sigma_{11}\Sigma_{11}^{-})\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{I}-\Sigma_{11}\Sigma_{11}^{-})M_1'\boldsymbol{\Theta}^{-}M_1)}=\\&(\det(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\Lambda))^{-\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda})^{-}(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}\Gamma_{11}\boldsymbol{\Lambda}M_1'\boldsymbol{\Theta}^{-}M_1\boldsymbol{\Lambda})}\times\\&\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda})^{-}\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda})\Gamma_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}\Sigma_{11}\boldsymbol{\Lambda})^{-})\boldsymbol{\Lambda}M_1'\boldsymbol{\Theta}^{-}M_1\boldsymbol{\Lambda})}=\\&(\det(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma A\Sigma A}))^{-\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{A\Sigma A})^{-}(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{A\Sigma A\Gamma})^{-1}\boldsymbol{A\Sigma A\Gamma AM}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{MA})}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A\Sigma A})^{-}\boldsymbol{A\Sigma A})\Gamma(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A\Sigma A}(\boldsymbol{A\Sigma A})^{-})\boldsymbol{AM}'\boldsymbol{\Theta}^{-}\boldsymbol{MA})},\end{aligned}$$

故式(21)成立.

(3) 因为 $p\times m$ 阶的矩阵 A 可进行奇异值分解，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_{p\times p}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{c\times c}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}_{p\times m}\boldsymbol{V}_{m\times m},$$

其中 U，V 均为正交矩阵，则利用(1)，(2)的结论，定理可证.

参考文献:

[1] MUIRHEAD R J. Aspects of Multivariate Statistical Theory[M]. New York: John Wiley and Sons, 1982.

[2] 刘金山. Wishart 分布引论[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[3] UHLIG H. On singular Wishart and singular multivariate Beta distributions [J]. The Annals of Statistics, 1994, 22(1): 395-405.

[4] DIAZ-GARCIA J A, JAIMEZ R C. Wishart and Pseudo-Wishart distributions and some applications to shape theory [J]. Journal of Multivariate Analysis, 1997, 63: 73-87.

[5] DIAZ-GARCIA J A, JAIMEZ R C. Proof of the conjectures of H. UHLIG on the singular multivariate Beta and the Jacobian of a certain matrix transformation [J]. The Annals of Statistics, 1999, 25: 2018-2023.

[6] AKEMANN G, KIEBURG M, WEI L. Singular value correlation functions for products of Wishart random matrices [J]. Journal of Physics A Mathematical & Theoretical, 2013, 46: 1103-1114.

[7] JANIK R A, NOWAK M A. Wishart and Anti-Wishart random matrices [J]. Journal of Physics A General Physics, 2008, 36(12): 3629-3637.

Characteristic Function of Non-Central Singular Wishart Distribution

LI Fei, LI Qin

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract: With the SVD's decomposition and the characteristic function of non-central Chi-square distribution, the characteristic function of non-central singular Wishart distribution is deduced. An important property of Wishart distribution is extended to the case of singular and non-central. And we proved the non-central singular Wishart distribution by the characteristic function.

Key words: non-central singular Wishart distribution; singular normal distribution; characteristic function

(责任编辑 李春梅)

本刊为下列检索期刊及数据库刊源

- 美国《化学文摘》（CA）
- 《中国数学文摘》

《机械与运输工程文摘》（MTEA）
《腐蚀文摘》（Corr A）
《计算机信息系统文摘》（CISA）
《土木工程文摘》（CEA）
《固体与超导体文摘》（SSSA）
- 俄罗斯《文摘杂志》（PЖ）
- 德国《数学文摘》（ZBI MATH）
- 《中国学术期刊文摘数据库》（CSAD）
- 《中国光学与应用光学文摘》
- 《中国期刊网》
- 《中国学术期刊综合评价数据库》
- 《中国学术期刊（光盘版）》
- 《万方数据——数字化期刊群》
- 《中国科技论文统计源期刊》
- 《中文科技期刊数据库》
- 《国家科技学术期刊开放平台》

烟台大学学报

（自然科学与工程版）

Yantai Daxue Xuebao

(Ziran Kexue yu Gongcheng Ban)

（季刊　1988年创刊）

第32卷　第3期（总第118期）2019年7月15日

JOURNAL OF YANTAI UNIVERSITY

(Natural Science and Engineering Edition)

(Quarterly, Started in 1988)

Vol.32　No.3　(Serial.118)　2019-07-15

主管单位　山东省教育厅
主办单位　烟台大学
编辑出版　烟台大学学报编辑部
主　　编　郝曙光
地　　址　山东省烟台市莱山区
邮政编码　264005
邮　　箱　xuebao@ytu.edu.cn
网　　址　http://xuebao.ytu.edu.cn
印　　刷　烟台大学印刷厂
发行单位　烟台大学学报编辑部

Authorized by Shandong Provincial Education Department
Sponsored by Yantai University
Edited and Published by Editorial Office of Journal of Yantai University
Chief Editor HAO Shu-guang
Address Laishan District, Yantai 264005, Shandong, P.R.China
Distributed by Editorial Office of Journal of Yantai University
E-mail xuebao@ytu.edu.cn

ISSN 1004-8820
CN 37-1213/N

定价：10. 00元