

三阶微分方程模型的混沌性判据

孙丰云, 王智峰

(烟台大学数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

摘要: 研究三阶微分方程模型的混沌性判据. 研究方法主要采用待定系数法, 讨论了三阶微分方程模型的同宿轨、异宿轨的存在性, 以及对于不同参数其存在不同意义下的混沌吸引子. 在理论分析过程中, 结合什尔尼科夫引理验证其有斯梅尔马蹄映射意义下的混沌.

关键词: 同宿轨; 异宿轨; 什尔尼科夫定理

中图分类号: O175 **文献标志码:** A

混沌是一个非常有意义的非线性现象, 在过去的几十年中被广泛地研究. 在物理、化学、能源、工程甚至工业中许多问题, 可以归结为具有鞍焦型同宿轨、异宿轨的三阶微分方程. 对于这一类系统, 通过巧妙构造空间的基, 可以建立二维庞加莱映射, 那么什尔尼科夫方法就是用来判断这类系统的二维庞加莱映射具有斯梅尔马蹄变换的解析方法之一. 按照动力学系统理论, 如果一个平面映射存在斯梅尔马蹄变换, 这个映射就具有反映混沌属性的不变集.

近几十年来, 什尔尼科夫方法应用得到了一些进展, 对于一类特定的三阶常微分方程和一些二维或三维映射, 也建立了相应的什尔尼科夫方法, 但是因为在三维相空间证实存在鞍焦型同宿轨、异宿轨是一件极为困难的工作, 所以直到现在, 还没有得到广泛地应用.

本文主要研究三阶微分方程模型的混沌性判据. 研究方法主要采用待定系数法. 特别地, 得到的结果是三阶微分方程模型有 2 种类型的轨: 什尔尼科夫意义下的异宿轨和同宿轨. 在数值分析的推导过程中, 我们给出了轨道的代数解析表达式并验证了它们的一致收敛性. 根据什尔尼科夫引理, 很清晰地得到三阶微分方程模型本质上是伴有斯梅尔马蹄映射意义下的混沌.

这里引入一个三阶微分方程模型 (1), 是由 ZHENG and CHEN^[1] 所提出的, 其区别于广义的洛伦兹 (LORENZ) 系统^[2-3]. 从另一方面, 该系统可以在吕系统^[4] 和陈系统^[5] 之间建立一个依据参数的拓扑连接空间. 在本文的下一步工作中我们采用了进一步简化后的微分方程模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = dx_1 + cx_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \end{cases} \quad (1)$$

这里 a, b, c, d 是参数. 当 (a, b, c, d) 等于 $(a, b, -1, d)$, $(a, b, c, c-a)$, $(a, b, c, 0)$ 时, 系统 (1) 分别对应的就是洛伦兹系统, 陈系统, 吕系统. 以参数 $a = 63$, $b = \frac{10}{3}$, $c = 31$, $d = 35$ 为例, 针对参数 c 的分岔图见图 1. 很明显, 系统在 $30 < c < 35$ 之间产生分岔.

收稿日期: 2016-03-20

基金项目: 山东省教育厅基金资助项目 (J14LI07).

作者简介: 孙丰云 (1981-), 男, 山东烟台人, 副教授, 博士, 研究方向为混沌与分岔.

1 预备知识

对于三阶自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad t \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

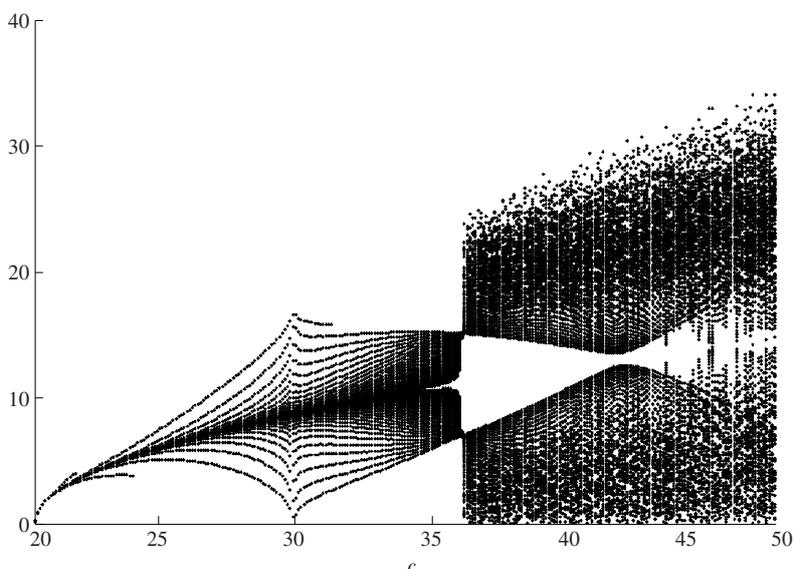


图 1 分岔图

Fig. 1 The bifurcation map

这里 映射 $f(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

我们假设 $x_e \in \mathbb{R}^3$ 是系统 (2) 的平衡点. 如果系统矩阵 $A = Df$ 在平衡点 x_e 处的特征值满足如下的形式:

$$\gamma \pm i\omega; \quad \sigma \gamma < 0 \quad \omega \neq 0,$$

这里的 $\gamma \quad \sigma \quad \omega$ 都是实数 那么 x_e 被称为双曲的鞍焦点 而连接鞍点的轨线有 2 种情况:

- (1) 同宿轨: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时 轨线趋于同一鞍点.
- (2) 异宿轨: 当 $t \rightarrow -\infty$ 时 轨线趋于 2 个不同的鞍点.

下面介绍什尔尼科夫定理.

引理 1^[6-7] (什尔尼科夫异宿轨定理) 假设对已知的系统 (2) 有 2 个不同的鞍焦型平衡点 x_e^1 和 x_e^2 对于不同的平衡点系统的线性化矩阵 $A = Df$ 分别对应的特征值为: $\gamma_k \pm i\omega_k (k = 1, 2)$; 如果它们还满足如下的什尔尼科夫不等式:

$$\begin{aligned} |\gamma_k| > |\sigma_k| > 0 \quad k = 1, 2, \\ \sigma_1 \sigma_2 > 0, \quad \gamma_1 \gamma_2 > 0. \end{aligned}$$

同时假设存在一条异宿轨连接 x_e^1 和 x_e^2 那么:

- (1) 在异宿轨的邻域内定义的什尔尼科夫映射具有离散系统中可数列的斯梅尔马蹄映射;
- (2) 系统 (2) 具有斯梅尔马蹄变换意义下的混沌.

引理 2^[6-7] (什尔尼科夫同宿轨定理) 假设对已知的系统 (2) 有 1 个鞍焦型平衡点 x_e 对于平衡点系统的线性化矩阵 $A = Df$ 对应的特征值为: $\gamma \pm i\omega$; 如果它们还满足如下的什尔尼科夫不等式:

$$|\gamma| > |\sigma| > 0,$$

同时假设存在一条同宿轨连接 x_e 那么:

- (1) 在同宿轨的邻域内定义的什尔尼科夫映射具有离散系统中可数列的斯梅尔马蹄映射;
- (2) 系统 (2) 具有斯梅尔马蹄变换意义下的混沌.

2 理论分析

2.1 异宿轨的存在性

根据文献[8],本文将其结果做了修正.

首先,系统(1)关于平衡点 $x_e^1 = (\sqrt{b(d+c)}, \sqrt{b(d+c)}, d+c)$ 有如下的线性化形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{b(d+c)} \\ \sqrt{b(d+c)} & \sqrt{b(d+c)} & -b \end{pmatrix}. \quad (4)$$

那么雅克比矩阵 A 的特征值代数表达式为:

$$\lambda^3 + (a-c+b)\lambda^2 + b(a+d)\lambda + 2ab(c+d) = 0. \quad (5)$$

令 $\lambda = u - \frac{1}{3}$, 得到: $u^3 + pu + q = 0$.

这里

$$p = ac - \frac{(a+c)^2}{3}, q = \frac{2(a+c)^2}{27} - \frac{ac(a+c)}{3} + 2abc, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \\ \alpha_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \\ \beta_1 = \frac{-1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \right). \end{cases} \quad (7)$$

根据特征方程法,例如给出参数 $a=63, b=\frac{10}{3}, c=31, d=35$, 通过计算可以得到: $\lambda_1 = -17.5614, \lambda_{2,3} =$

$2.5307 \pm 10.3673i$ 其满足引理1的条件.

其次,根据系统(1),可以得到:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{\dot{x}_1}{a}, \\ x_3 &= c + d + \frac{(c-a)\dot{x}_1 - \ddot{x}_1}{ax_1}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{(c-a)\dot{x}_1 - \ddot{x}_1}{x_1} \right) + b \frac{(c-a)\dot{x}_1 - \ddot{x}_1}{x_1} - ax_1^2 - x_1\dot{x}_1 + ab(d+c) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

如果 $x_1(t)$ 被求出,那么相应的 $x_2(t), x_3(t)$ 也可以得到相应的结果,那么去寻求异宿轨的代数表达式变为去寻求一个方程 $\varphi(t)$ 使得 $x_1(t) = \varphi(t)$ 满足如下的条件:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\rightarrow \gamma \quad t \rightarrow +\infty, \quad \varphi(t) \rightarrow -\gamma \quad t \rightarrow -\infty; \\ \varphi(t) &\rightarrow \gamma \quad t \rightarrow -\infty, \quad \varphi(t) \rightarrow -\gamma \quad t \rightarrow +\infty; \end{aligned} \quad (9)$$

不失一般性,我们假设当 $t \rightarrow +\infty$ 时,从 x_e^1 到 x_e^2 ; 当 $t \rightarrow -\infty$ 时,从 x_e^2 到 x_e^1 .

下面假设,对于 $t > 0$,

$$\varphi(t) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{kat}, \quad (10)$$

这里 $\alpha < 0$ 是个待定常量, $a_k (k \geq 1)$ 是待定系数. 因为:

$$1 = \varphi(t) \frac{1}{\varphi(t)} = \left(-\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{kat} \right) \left(-\frac{1}{\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{kat} \right), \quad (11)$$

这里: $B_1 = -\frac{1}{\gamma^2}a_1$ $B_k = \frac{1}{\gamma}(-\frac{1}{\gamma}a_k + \sum_{i+j=k} a_i B_j)$ $i \geq 1$ $j \geq 1$ $k > 1$.

根据比较 e^{kat} ($k \geq 1$) 的系数, 得到:

对于 $n = 1$:

$$a_1 [\alpha(\alpha + a - c)(\alpha + b) + b(d + c)(\alpha + 2a)] = 0. \tag{12}$$

对于 $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{1}{\omega(n\alpha)} [-\gamma \sum_{i+j=n} (a + j\alpha) a_i \times a_j - \alpha(n\alpha + b) \sum_{i+j=n} b_i \times c_j]. \tag{13}$$

这里

$$\begin{cases} \omega(n\alpha) = (n\alpha)^3 + (\alpha + b - c)(n\alpha)^2 + b(a + d)(n\alpha) + 2ab(c + d) = 0, \\ b_i = i(i\alpha + a - c) a_i, \\ c_j = \sum_{(l_1, \dots, l_j) \in S_j} \prod_{k=1}^j \left(\frac{a_k}{\sqrt{b}}\right)^{l_k} \frac{(\sum_{k=1}^j l_k)!}{\prod_{k=1}^j (l_k)!}, \end{cases} \tag{14}$$

其中:

$$S_j = \{(l_1, \dots, l_j) \mid l_1 \geq 0, \dots, l_j \geq 0, \sum_{i=1}^j i \times l_i = j\}.$$

这里假设 $a_1 \neq 0$, 反之可推导出当 $k > 1$ 时 $a_k = 0$. 比较式 (5) 和 (11), 发现 $n = 1$ 时得到的结论就是系统关于平衡点线性化雅克比矩阵的特征多项式. 因此 a_k 完全由 α , a_1 及系统里的参数确定且有如下的形式:

$$a_k = \varphi_k a_1^k, k > 1. \tag{15}$$

上面的讨论是关于 $t > 0$ 的情况, 下面考虑 $t < 0$ 时的情况.

由系统的对称性, 已知 $\varphi(t)$ 是方程 (8) 的一个解, 那么 $-\varphi(-t)$ 也是它的解. 所以,

$$\varphi(t) = \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kat}, t < 0. \tag{16}$$

根据解的连续性可知: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \gamma$.

如果参数 a, b, c, d 满足一些条件, 比如 $a = 63, b = \frac{10}{3}, c = 31, d = 35$, 系统就有一条连接 x_e^1 和 x_e^2 的异宿轨, 并且有如下的形式:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{kat}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kat}, & t < 0, \end{cases} \tag{17}$$

现在一个自然的问题出现: $a_1 \neq 0$, 那么 a_1 是否存在?

下面考虑这样的代数方程: $F(a_1) = \varphi_n a_1^n + \varphi_{n-1} a_1^{n-1} + \dots + a_1 - \gamma = 0$. 显然 $F(0) = -\gamma < 0$. 当 n 和 a_1 足够大时, 可以推导出 $\dot{F}(a_1) > 0$, 这隐含着方程至少有一个实根. 以上述的参数为例, 通过计算机数值计算, 得到当 $n > 35$ 时 $a_1 = 14.5358$.

经上述的分析推导, 可以得知 a_1 是存在的, 同时也可以算出 a_k ($k = 2, 3, \dots$).

在上面工作的基础上, 下面给出本研究的第一个结论.

定理 1 假设 $b(d + c) > 0$, 根据引理 1 和上述的数值分析, 如果满足下列不等式:

$$\alpha_1 + \beta_1 < \frac{2(a + b - c)}{3},$$

那么系统 (1) 有异宿轨存在, 并且该系统是斯梅尔马蹄意义下的混沌.

推论 1 假设参数以 $a = 63, b = \frac{10}{3}, c = 31, d = 35$ 作为实例, 可以计算出: $\alpha_1 = -31.0440, \beta_1 = 15.5220$.

根据定理 1 可以得到:

$$\alpha_1 + \beta_1 = -15.5220 < \frac{2(a+b-c)}{3} = 23.5556$$

2.2 同宿轨的存在性

根据文献 [8] 本文将同宿轨存在性作了研究, 得到如下结果.

首先, 系统 (1) 关于平衡点 $x_e^3 = (0 \ 0 \ 0)$ 有如下的线性化形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (19)$$

那么雅克比矩阵 A 的特征值代数表达式为: $(\lambda + b)(\lambda^2 + (a - c)\lambda - ad - ac) = 0$.

根据上述类似的讨论, 我们假设 $\varphi(t) \rightarrow (0 \ 0 \ 0)$ $t \rightarrow +\infty$;

下面假设, 对于 $t > 0$,

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{k\beta t}, \quad (20)$$

这里 β 是待定常量, $d_k (k \geq 1)$ 是待定系数. 因为:

$$1 = \phi(t) \frac{1}{\phi(t)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{k\beta t} \right) \left(\sum_{p=-1}^{\infty} c_p e^{p\beta t} \right), \quad (21)$$

其中:

$$\begin{cases} c_{-1} = -\frac{1}{d_1}, \\ c_0 = -\frac{d_2}{d_1}, \\ c_1 = -\frac{d_3 c_{-1} + d_2 c_0}{d_1}, \\ \dots\dots \\ c_p = -\frac{\sum_{i+j=p+1} d_i c_j}{d_1}, \quad i \geq 1, j \geq -1. \end{cases} \quad (22)$$

根据比较 $e^{k\beta t} (k \geq 1)$ 的系数, 得到:

对于 $n = 1$:

$$\frac{\beta}{d_1}(\beta + b) [2(2\beta + a - c)d_2 + f_2] = \frac{\beta}{d_1}(\beta + b)(3\beta + a - c)d_2 = 0,$$

对于 $n \geq 2$:

$$\frac{\beta}{d_1}(n\beta + b) [(n+1)((n+1)\beta + a - c)d_{n+1} + f_{n+1}] + \sum_{i+j=n} (a + i\beta)d_i d_j = 0,$$

其中:

$$f_n = \sum_{i+j=n} i(i\beta + a - c)d_{i+1}e_j,$$

$$e_j = \sum_{(l_1, \dots, l_j) \in R_j} \prod_{k=1}^j \left(\frac{-d_{k+1}}{d_1} \right)^{l_k} \frac{\left(\sum_{k=1}^j l_k \right)!}{\prod_{k=1}^j (l_k!)},$$

所以 $k\beta + b \neq 0$, $k\beta + a - c \neq 0$, 可以推导出: $d_{2k} = 0 \quad k \geq 2$.

如果参数 a, b, c, d 满足一定条件, 如 $a = 63, b = \frac{10}{3}, c = 31, d = 35$ 时, 系统就有一条连接 x_e^3 的同宿轨且有如下的形式:

$$\phi(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k+1} e^{k\beta t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -\sum_{k=1}^{\infty} d_{2k+1} e^{-k\beta t}, & t < 0. \end{cases} \quad (23)$$

由以上的讨论, 容易得到下面的定理:

定理 2 假设 $b(d+c) > 0$ 根据引理 2 和上述的数值分析, 如果满足下列不等式:

$$k\beta + b \neq 0, k\beta + a - c \neq 0,$$

那么系统(1)有同宿轨存在, 并且该系统是斯梅尔马蹄意义下的混沌.

3 结 论

基于什尔尼科夫引理, 我们通过数值分析、计算和待定系数法, 证实了系统异宿轨、同宿轨的存在性, 给出了系统参数应满足的条件, 从而保证存在斯梅尔马蹄意义下的混沌. 但是这些条件只是混沌吸引子存在的一个充分条件, 而不是必要条件. 当然, 在给出异宿轨、同宿轨的数学解析表达式后, 其收敛性有待进一步证明, 这是本文后续将展开的工作.

参考文献:

- [1] ZHENG Z H, CHEN G. Existence of heteroclinic orbits of the Sil'nikov type in a 3-D quadratic autonomous chaotic system [J]. *Electronic Power Energy System*, 1999, 21: 375-393.
- [2] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow [J]. *Journal Atmos Science*, 1963, 20: 130-141.
- [3] SPARROW C. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* [M]. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [4] LÜ J, CHEN G. A new chaotic attractor coined [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12: 659.
- [5] CHEN G, UETA T. Yet another chaotic attractor [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9: 1465.
- [6] SIL'NIKOV L P. A case of the existence of a countable number of periodic motions [J]. *Sov Math Doklady* 6: 163-166.
- [7] SIL'NIKOV L P. A contribution of the problem of the structure of an extended neighborhood of rough equilibrium state of saddle-focus type [J]. *Math USSR Shornik* 10: 91-102.
- [8] WANG J W, ZHAO M C. Sil'nikov-type orbits of Lorenz-family systems [J]. *Physica A* 2007, 375: 438-446.

Chaotic Criterion for Three-Order Differential Equation Model

SUN Feng-yun, WANG Zhi-feng

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract: Numerical analysis for nonlinear chaotic Lorenz-type System is considered which exhibits different chaotic attractors with different equilibria for some parameters. The existence of heteroclinic orbits and homoclinic orbits of Sil'nikov type in a chaotic system is proved by using the undetermined coefficient method. As a result, the Sil'nikov criterion guarantees that the system has Smale horseshoes.

Key words: heteroclinic orbit; homoclinic orbit; Sil'nikov theorem

(责任编辑 李春梅)