

平面点集边界聚点的存在性研究

◎李波 侯汝臣 孙丰云 (烟台大学数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

【摘要】本文解决了平面点集的聚点存在能否决定其边界聚点存在这一问题,并以闭集套定理和聚点定理为工具给出了证明.

【关键词】平面点集;聚点;界点;闭集套定理

【中图分类号】O171 文献标识码 A

【基金项目】山东省自然科学基金资助项目(ZR2017MA044),山东省高校科研计划项目(J17KAI73).

引言

了解平面点集的概念和性质是学习多元函数微积分,特别是二元函数微积分的基础,几乎所有的教材都会在介绍多元函数微积分理论之前对平面点集做详细的介绍.聚点又是平面点集的一个非常重要的概念,对于研究多元函数的极限,连续以及微分等分析学性质至关重要.受一道例题的启发,本文我们对聚点的一个性质进行了探讨和分析,并对结论进行了证明.

在《数学分析》平面点集与多元函数一节有一道例题(P_{95} ,例2):证明对任何 $S \subset \mathbf{R}^2$, ∂S 恒为闭集.其证明过程如下:

证明:假设 x_0 为 ∂S 的任意聚点,只需证明 $x_0 \in \partial S$ 即可.

对于 $\forall \varepsilon > 0$,由聚点的定义,存在 $y \in \dot{U}(x_0; \varepsilon) \cap \partial S$.又因为 y 是 S 的界点,所以对任意的 $U(y; \delta) \subset U(x_0; \varepsilon)$, $U(y; \delta)$ 上既有属于 S 的点,又有不属于 S 的点,所以 $U(x_0; \varepsilon)$ 上也既有属于 S 的点,又有不属于 S 的点,由 ε 的任意性,得 x_0 是 S 的界点,即 $x_0 \in \partial S$,证毕.

关于该结论还有另外几种证明方法:

证一:设 $x \in (\partial S)^c$,即 ∂S 的余集,则 x 只能是 S 的内点或外点.如果 x 为 S 的内点,则 $\exists \delta > 0$, s.t. $U(x; \delta) \subset S$,由内点的定义知 $U(x; \delta) \subset (\partial S)^c$;若 x 为 S 的外点,则 $\exists \delta > 0$, s.t. $U(x; \delta) \cap S = \emptyset$,所以 $U(x; \delta) \subset S^c$,而 $U(x; \delta)$ 是开集,所以 $U(x; \delta)$ 中的点均不是 S 的界点,即 $U(x; \delta) \subset (\partial S)^c$.由开集定义知 $(\partial S)^c$ 为开集,则 ∂S 为闭集.

证二:设 $x \in (\partial S)^d$ (∂S 的导集,即 ∂S 的所有聚点的集合),由聚点的等价定义,存在相异点列 $\{x_n\} \subset S, x_n \neq x (n = 1, 2, \dots)$, s.t. $x_n \rightarrow x$,则对任意的 $\delta > 0$, $\exists N$,当 $n > N$ 时, $x_n \in U(x; \delta)$,取 $n_0 > N$,由于 $x_{n_0} \in \partial S$,则由界点的定义知 $U(x_{n_0}; \delta - |x_{n_0} - x|) \subset U(x; \delta)$ 中有属于 S 的点,也有不属于 S 的点,所以 $x \in \partial S$,则 ∂S 为闭集.

证三:设 $x \in \partial(\partial S)$,则 $\forall \delta > 0$,在 $U(x; \frac{\delta}{2})$ 中有 ∂S 的点

y .又由界点定义,在 $U(y; \frac{\delta}{2})$ 内既有 S 中的点,也有不在 S 中的点.由于 $U(y; \frac{\delta}{2}) \subset U(x; \delta)$,因此 $U(x; \delta)$ 中既有属于 S 的点,也有不属于 S 的点,于是 $x \in \partial S$,则 ∂S 为闭集.

这几种证明方法从不同的角度对问题进行了解析,但前提都是先假设边界存在聚点,再证聚点属于边界,从而证明边界是闭集.我们知道,一个平面点集不存在聚点也称为闭集,那么问题来了,边界是否一定存在聚点呢?对于该题目的结论及其证明过程有以下几点思考:

- (1)若 S 为无界点集, ∂S 是否一定有聚点,是否恒为闭集;
- (2)若 S 为有界点集, ∂S 是否一定有聚点,是否恒为闭集;
- (3) S 和 ∂S 聚点的存在性关系如何, S 的聚点是不是一定为 ∂S 的聚点.

例题中对 ∂S 的聚点的存在性没有做具体的讨论,本文对此进行了分析,并给出相应的结论:

〈主定理〉若有界平面点集 S 有聚点,则其边界 ∂S 必有聚点.

应用闭集套定理和聚点定理给出了证明.需要注意的是,若无界平面点集 S 有聚点,则其边界 ∂S 不一定有聚点,见〈注2〉.

预备知识

为读者阅读方便,我们给出一些预备知识.

〈平面点集〉二维坐标平面上所有满足某性质 P 的点的集合称为平面点集,记为 S .

〈界点〉若在点 M 的任何邻域 $U(M)$ 内都既含有 S 中的点,又含有不是 S 中的点,则称 M 为 S 的界点,全体界点的集合称为 S 的边界,记为 ∂S .

〈内点〉设点 $M \in S$,若存在点 M 的某个邻域 $U(M)$,使得 $U(M) \subset S$,则称 M 为点 S 的内点.

〈有界点集和无界点集〉对于某平面点集 E ,如果存在一个正常数 r ,使得 $E \subset U(O; r)$,则称 E 为有界点集,否则,称为无界点集.

〈聚点〉关于聚点的定义,在拓扑学、实分析和复分析中

都有各自的描述:

拓扑学中,设拓扑空间 (X, τ) , $A \subseteq X, x \in X$, 若 x 的每一个邻域 $U(x)$ 都含有 $A \setminus \{x\}$ 的点, 即 $U(x) \cap A \neq \emptyset$, 则称 x 为 $A \setminus \{x\}$ 的聚点.

在实空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 关于聚点的定义有三个等价描述:

- (1) 点 M 为点集 S 的聚点;
- (2) 点 M 的任何空心邻域 $\overset{\circ}{U}(M)$ 内都含有 S 中的点;
- (3) 存在相异点列 $\{x_n\} \subset S, x_n \neq x (n=1, 2, \dots), s.t. x_n \rightarrow x$.

在复分析中, 若在复平面上的一点 M 的任意邻域都有点集 S 的无穷多个点, 则称 M 为 S 的聚点.

〈开集〉若属于平面点集 S 的所有点都是内点, 则称 S 为开集.

〈闭集〉若平面点集 S 的所有聚点都属于 S 或者 S 无聚点, 则称 S 为闭集.

〈闭集套定理〉设 $\{E_n\}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集列, 满足

- (1) $E_n \supset E_{n+1}, n=1, 2, \dots$;
- (2) 设 $d_n = d(E_n)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$.

则存在唯一的点 $P^* \in E_n, n=1, 2, \dots$.

〈聚点定理〉有界无限点集至少有一个聚点.

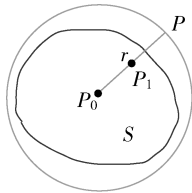
三、结论及其证明

首先我们分析一维的情形, 如在数轴上的开区间 (a, b) , 其导集(所有聚点的集合)为 $[a, b]$, 边界只有 a, b 两个点, 且为孤立点, 所以边界不存在聚点. 又如点列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}, n=1, 2, 3, \dots$, 其边界集为 $\left\{\frac{1}{n}\right\} \cup \{0\}, n=1, 2, 3, \dots$, 显然二者存在共同的聚点 0. 对于一维的无界点集, 如 $(a, +\infty), \{n\}, n=1, 2, 3, \dots$ 等, 有类似的结论. 所以, 对于一维数轴上的点集, 集合本身和其边界聚点的存在性之间没有必然的联系.

接下来, 对于二维的情形, 我们假设 S 为有界平面点集, 以定理的形式给出结论, 并利用闭集套定理和聚点定理给出证明. 另外, 对于 S 为无界平面点集的情形, 我们以注解的形式结合反例给予说明.

〈定理〉若有界平面点集 S 有聚点, 则其边界 ∂S 必有聚点.

证明 若 $S = \partial S$, 结论显然成立. 若 $\partial S \neq S$, 则 S 中必含有内点, 记为 P_0 . 由内点的定义, $\exists \delta > 0, s.t. U(P_0; \delta) \subset S$. 又因为 S 有界, 所以 $\exists r > 0, s.t. S \subset U(P_0; r)$, 且对于任意的 $M \in S, \rho(P_0, M) < r$. 从 P_0 出发向外作射线交 $U(P_0; r)$ 于点 P , 记 E_0 为 $\overline{P_0 P}$ 上(包含端点, 下同)所有点的集合, 则 E_0 既含有 S 中的点也含有 S^c 中的点. 取 $\overline{P_0 P}$ 的中点记为 P_1 , 则 $\overline{P_0 P_1}$ 和 $\overline{P_1 P}$ 中至少有一段满足既含有 S 中的点又含有 S^c 中的点, 不妨



设 $\overline{P_0 P_1}$ 满足条件, 记为 E_1 , 显然 $E_1 \subset E_0$, 且 $\rho(P_0, P_1) = \frac{r}{2}$.

取 $\overline{P_0 P_1}$ 的中点记为 P_2 , 则 $\overline{P_0 P_2}$ 和 $\overline{P_2 P_1}$ 至少有一段满足既含有 S 中的点又含有 S^c 中的点, 不妨设 $\overline{P_0 P_2}$ 满足条件, 记为 E_2 , 且满足 $E_2 \subset E_1, \rho(P_0, P_2) = \frac{r}{2^2}$. 依此类推, 我们可以得到一个闭集列 $\{E_n\}, n=1, 2, \dots$, 满足

- (1) $E_n \supset E_{n+1}, n=1, 2, \dots$;
- (2) $\rho(E_n) = \frac{r}{2^n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 即

$\{E_n\}, n=1, 2, \dots$ 构成了一个闭集套. 由闭集套定理, 存在唯一的点 $P_1^* \in E_n, n=1, 2, \dots$, 则对任意的 $\varepsilon > 0, U(P_1^*, \varepsilon)$ 中含有 $\{E_n\}, n=1, 2, \dots$ 中无限多个元素, 即 P_1^* 的任何邻域都既含有 S 中的点又含有 S^c 中的点, 故 P_1^* 为 S 的界点.

进一步, 从 P_0 出发可以作无限条射线, 按照上述方法可以得到无限个点集 S 的界点, 又由点集 S 的有界性, 我们可以得到一个有界无限点集 $\{P_n^* \in \partial S, n=1, 2, \dots\}$, 应用聚点定理, 得到 $\{P_n^*\}$ 存在聚点 P^* , 定理得证.

对于该定理的结论, 我们有如下几点补充说明:

〈注 1〉 ∂S 有聚点, 则聚点一定属于 ∂S , 进而 ∂S 一定为闭集;

〈注 2〉 S 为无界点集的情形, 分两种情况:

(1) $S = \partial S$. 若 S 有聚点, 则 ∂S 也有聚点, 且相同, 反之亦然.

举例 1 $S = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{Z}\}$, 显然 $S = \partial S$ 无界且元素均为孤立点, 无聚点;

举例 2 $S = \{(x, y) | y = kx + b, k, b \in \mathbf{R}\}$, $S = \partial S$ 无界且其元素均为聚点.

(2) $S \neq \partial S$. 若 S 有聚点, ∂S 未必有聚点.

举例 设 $S = \mathbf{R}^2 \setminus \{P_0\}, P_0$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中任一点, 显然 $\partial S = \{P_0\}$. 点集 S 的聚点集为 $\mathbf{R}^2$, 而 ∂S 为孤立点集, 因此没有聚点.

事实上, 如果平面点集 S 为 $\mathbf{R}^2$ 除去一个孤立点集而得到的, 其边界都无聚点.

〈注 3〉该结论可以推广到 $\mathbf{R}^n (n > 2)$ 的空间点集的情形.

举例 设 $S = \mathbf{R}^n \setminus \{P_0\}, P_0$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一点, 显然 $\partial S = \{P_0\}$. 点集 S 的聚点集为 $\mathbf{R}^n$, 而 ∂S 为孤立点集, 因此没有聚点.

【参考文献】

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.6.
- [2] 谢惠民, 等. 数学分析习题课讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.