ISSN 1008-1399
CN61-1315/O1

- 国家自然科学基金委员会数学天元基金支持刊物
- 《中国期刊网》、《中国学术期刊》（光盘版）全文收录期刊
- 《中国学术期刊综合评价数据库》来源期刊
- 《万方数据-数字化期刊群》、《中文科技期刊数据库》全文收录期刊
- 《中国核心期刊（遴选）数据库》收录期刊
- 《CEPS思博网-中文电子期刊服务》收录期刊
- 《中国数学文摘》、《中国数学文献数据库》收录期刊
- 2000年获“陕西省优秀科技期刊一等奖”
- 国家新闻出版广电总局第一批认定学术期刊

高等数学研究

陈省身题

GAODENG SHUXUE YANJIU

STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

ISSN 1008-1399
07>
9 771008 139177

2017 4

第20卷第4期（总第180期）
2017年7月出版
西北工业大学　陕西省数学会　主办

高等数学研究

STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

第 20 卷第 4 期

（总第 180 期）

2017 年 7 月出版

（1954 年创刊）

国内外公开发行

主管：陕西省科学技术协会

主办：西北工业大学　陕西省数学会

编辑出版：高等数学研究编辑部

地址：西安市西北工业大学

邮编：710072

电话/传真：86-29-88491574

投稿信箱：gdsxyj@yeah. net

gdsxyj@nwpu. edu. cn

业务信箱：gdsxyj@126. com

印刷装订：西安昆明印刷厂

邮发代号：52—192

国外代号：BM2987

国内总发行：中国邮政集团公司

陕西省报刊发行局

国外总发行：中国国际图书贸易总公司

ISSN 1008—1399

CN 61—1315/O1

国内定价：￥15.0 元

国外定价：$15.0 元

目　录

第 20 卷 第 4 期
2017 年 7 月

高 等 数 学 研 究
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 20，No. 4
July，2017

doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2017.04.014

一个统计基本定理的三种证明方法

崔艳丽
（烟台大学 数学与信息科学学院，山东 烟台 264005）

摘　要　本文依托多元正态分布的性质，给出了数理统计中一个基本定理的三种证明方法.

关键词　多元正态分布；卡方分布；独立；幂等阵

中图分类号　O212.1　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2017)04-0046-02

Three Proofs for a Basic Theorem in Statistics

CUI Yanli
(School of Mathematics and Information Science，Yantai University，Yantai 264005，China)

Abstract　Three different proofs of a basic theorem in statistics are presented in this paper. The proofs are based on the properties of multivariate normal distribution.

Keywords　multivariate normal distribution，chi-square distribution，independence，idempotent matrix

1　引言

在数理统计中，下述定理及其一系列推论是一元正态总体统计推断的基础，然而对此定理的证明教材中鲜有涉及. 本文依托多元正态分布的性质，提供三种证明方法. 首先介绍要证明的基本定理：

定理 1　设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 n 的简单随机样本，则

(1) $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$；

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，其中 $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$；

(3) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

无论是假设检验中拒绝域的确定还是区间估计中枢轴量的寻找，上述定理都起到关键作用. 以区间估计为例，已知总体方差 σ^2，求均值 μ 的区间估计时，直观上希望从其点估计 $\overline{X}$ 出发得到一个随机区间. 为此需要寻找一个基于 $\overline{X}$ 的枢轴量，要求此随机变量含有未知参数 μ 并且其分布必须是完全已知的. 由定理的结论(1)知，将 $\overline{X}$ 标准化以后得到的 $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$ 满足上述两个要求，由此出发即可得到 μ 的区间估计.

2　三种证明方法

本节我们将给出定理 1 的三种证明方法. 事实上，定理 1 的结论(1)可由下述多元统计中的基本性质直接得出.

性质 1[1]　设随机向量 $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \sum)$，$\sum \geqslant 0$，$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times p$ 任意实矩阵，令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{BX}$，则 $\boldsymbol{Y} \sim N(\boldsymbol{B\mu}, \boldsymbol{B}\sum\boldsymbol{B}')$.

性质 1 告诉我们正态随机向量经过线性变换后所得向量仍服从正态分布. 因此对定理 1 的结论(1)，取常数矩阵 $\boldsymbol{B} = \frac{1}{n}\boldsymbol{1}'_{n\times 1}$，其中 $\boldsymbol{1}_{n\times 1}$ 表示各分量均为常数 1 的 n 维列向量，由性质 1 即得证. 对定理 1 中的结论(2)和(3)我们提供以下三种方法，由于一般正态随机变量经过标准化即服从标准正态分布，因此我们只需证明对标准正态分布结论成立即可.

收稿日期：2016-09-03　　修改日期：2016-11-28
基金项目：烟台大学博士科研启动基金(No. SX09B23)
作者简介：崔艳丽(1981－)，女，讲师，研究数理统计，Email：cuiyanli@amss.ac.cn.

2.1　方法一

由卡方分布的定义知,n 个相互独立的标准正态随机变量的平方和所服从的分布即为自由度为 n 的卡方分布. 基于此,我们采用一个特殊的正交变换,将 $(n-1)S^2$ 表示成变换后所得向量的 $n-1$ 个分量的平方和,证明结论(2),而 $\overline{X}$ 只跟另外一个分量有关,从而结论(3)得证. 详细证明过程如下:

方法一证明(2)　先构造一个正交阵,它的第一行是经过单位化的 $\mathbf{1}_{1\times n}$ 向量,此正交阵记为 $\boldsymbol{T}$,

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}}\\ \cdots & & \cdots\\ \cdots & & \cdots\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

令 $Y=(\boldsymbol{Y}_1,\cdots,Y_n)'=\boldsymbol{TX}$, 其中 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$,由性质 1 知,$\boldsymbol{Y}\sim N_n(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$,即变换后得到的随机向量各分量仍服从标准正态分布并且仍然保持了独立性. 经过计算,易得

$$Y_1=\sqrt{n}\overline{X},$$

$$\sum_{i=2}^{n}Y_i^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-Y_1^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=(n-1)S^2.$$

即

$$\overline{X}=\frac{1}{\sqrt{n}}Y_1,\tag{2.1.1}$$

$$(n-1)S^2=\sum_{i=2}^{n}Y_i^2.\tag{2.1.2}$$

由于 $\boldsymbol{Y}\sim N_n(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$,其各分量相互独立,故 Y_1 与 $\sum_{i=2}^{n}Y_i^2$ 相互独立,结合(2.1.1)与(2.1.2)得到 $\overline{X}$ 与 $(n-1)S^2$ 独立.

(3) 由(2.1.2)知 $(n-1)S^2$ 可以表示成 $n-1$ 个独立的标准正态随机变量的平方和,由卡方分布的定义即可得 $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$. □

2.2　方法二

方法二的证明依赖下述两个性质:

性质 2[1]　设 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 对称,$\boldsymbol{X}\sim N_n(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$,那么 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}\sim\chi^2(k)\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 幂等,$r(\boldsymbol{A})=k$.

性质 3[1]　设 $\boldsymbol{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{I})$,$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 对称阵,$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵. 若 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{CX}$ 和 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$ 相互独立.

从形式上看,$\overline{X}$ 及 $(n-1)S^2$ 实际上是正态向量的线性型和二次型,性质 2 给出了二次型服从卡方分布的充要条件,性质 3 给出了二者相互独立的一个充分条件,因此我们只需验证这些条件是否满足即可. 证明过程如下:

方法二证明(2)　观察到 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 实际上是样本 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的二次型,受性质 2 的启发,只需验证二次型对应的矩阵是一个秩为 $n-1$ 的幂等阵即可. 我们首先推导二次型的标准表达形式.

令　$\boldsymbol{Z}=(X_1-\overline{X},\cdots,X_n-\overline{X})'$,则

$$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z},$$

而

$$\boldsymbol{Z}=(X_1,\cdots,X_n)'-\mathbf{1}_{n\times1}\overline{X}=\boldsymbol{X}-\frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times1}\mathbf{1}'_{n\times1}\boldsymbol{X}$$
$$=(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times1}\mathbf{1}'_{n\times1})\boldsymbol{X},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$
$$=\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times1}\mathbf{1}'_{n\times1})(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times1}\mathbf{1}'_{n\times1})\boldsymbol{X}$$
$$=\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times1}\mathbf{1}'_{n\times1})\boldsymbol{X},$$

上式即为得到的标准表达形式.

令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times1}\mathbf{1}'_{n\times1}$,易知 $\boldsymbol{A}$ 是幂等阵,并且

$$r(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times1}\mathbf{1}'_{n\times1})$$
$$=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I})-\frac{1}{n}\mathrm{tr}(\mathbf{1}_{n\times1}\mathbf{1}'_{n\times1})=n-1,$$

由性质 2 结论得证.

(3) 由于 $\overline{X}=\frac{1}{n}\mathbf{1}'_{n\times1}\boldsymbol{X}$,$(n-1)S^2=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$,而 $\mathbf{1}'_{n\times1}\boldsymbol{A}=\mathbf{1}'_{n\times1}(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times1}\mathbf{1}'_{n\times1})=\mathbf{1}'_{n\times1}-\mathbf{1}'_{n\times1}=\boldsymbol{0}$,由性质 3 结论得证. □

2.3　方法三

注意到 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 可以分解成 $n\overline{X}^2$ 与 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 之和,即 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2=n\overline{X}^2+\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 易知 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$,$n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$,那么分解得到的第二个因子 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是否仍服从卡方分布,两个因子的关系如何 ?这两个问题的解答过程即为(2)与(3)的证明. 为此,我们首先引入下述性质:

性质 4[1]　设 $\boldsymbol{X}\sim N_n(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$,$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}\sim\chi^2(k)$,$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}\sim\chi^2(s)$,$\boldsymbol{A}_2\geqslant0$,则

(下转第 49 页)

当总抽样数确定时,下面定理给出了最优分配比例.

定理[1,2]　假设 σ_i^2 和 l_i 已知,总的抽样数为 n,则当

$$n_i = n\frac{l_i\sigma_i}{\sum_{i=1}^{m} l_i\sigma_i} \tag{2}$$

时,估计的方差达到最小为 $\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{m} l_i\sigma_i)^2$.

证明　由(1)得

$$Var(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{m}\frac{l_i^2}{n_i}\sigma_i^2 = \frac{l_1^2}{n_1}\sigma_1^2 + \frac{l_2^2}{n_2}\sigma_2^2 + \cdots + \frac{l_{m-1}^2}{n_{m-1}}\sigma_{m-1}^2 + \frac{l_m^2}{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}\sigma_m^2.$$

由 $\frac{\partial Var(\hat{\theta})}{\partial n_1} = 0$ 可以解得

$$\frac{l_1\sigma_1}{n_1} = \frac{l_m\sigma_m}{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}.$$

同理由 $\frac{\partial Var(\hat{\theta})}{\partial n_2} = 0, \frac{\partial Var(\hat{\theta})}{\partial n_3} = 0, \cdots, \frac{\partial Var(\hat{\theta})}{\partial n_{m-1}} = 0$,可以 解得

$$\frac{l_2\sigma_2}{n_2} = \frac{l_3\sigma_3}{n_3} = \cdots = \frac{l_{m-1}\sigma_{m-1}}{n_{m-1}} = \frac{l_m\sigma_m}{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}$$

根据等比性质,则有

$$\frac{l_1\sigma_1}{n_1} = \frac{l_2\sigma_2}{n_2} = \frac{l_3\sigma_3}{n_3} = \cdots = \frac{l_{m-1}\sigma_{m-1}}{n_{m-1}} = \frac{l_m\sigma_m}{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i\sigma_i}{n}$$

故当抽样比例满足(2)时,估计的方差达到最小为 $\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{m} l_i\sigma_i)^2$.

合理的确定抽样数是分层抽样法中的一个关键问题. 基于比例的知识,本文研究并给出了有关最优分配抽样比例结论的证明,为同学更好的理解和掌握这一基本结论提供了一种思路、方法和参考.

参考文献

[1]　茆诗松,王静龙,濮晓龙. 高等数理统[M]. 1 版. 北京:高等教育出版社,2000.

[2]　康崇禄. 蒙特卡罗方法理论和应用[M]. 北京:科学出版社,2014.

[3]　Sheldom M. Ross. Simulation[M]. Third Edition. 北京:人民邮电出版社,2006.

(上接第 47 页)

(1) $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X} \sim \chi^2(k-s)$,(2) $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}$ 相互独立,(3) $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0}$.

由性质 4 的证明过程知,如果将秩为 k 的幂等阵分解成两个矩阵之和,其中一个是秩为 s 的幂等阵另一个是非负定阵,那么非负定阵也是幂等阵且秩为 $k-s$,且分解所得两个矩阵之积为零矩阵;从而对应的二次型均服从卡方分布自由度分别为 s 与 $k-s$ 且二者相互独立. 利用性质 4 我们得到定理 1 的简洁证明.

方法三证明　我们首先得到分解式 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = n\overline{X}^2 + \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. 事实上

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X} + \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + n\overline{X}^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = n\overline{X}^2 + \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

进而将其表达成矩阵形式

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X'\frac{\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}'}{n}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}'}{n})\boldsymbol{X}.$$

易知

$n\overline{X}^2 \sim \chi^2(1)$,　由 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}'}{n})\boldsymbol{X} \geqslant 0$ 得到 $\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}'}{n} \geqslant 0$,

利用性质 4 知 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ 且 $\overline{X}^2$ 与 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 相互独立,进而 $\overline{X}$ 与 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 相互独立,定理的(2)与(3)同时被证明.　□

参考文献

[1]　王松桂,史建红,尹素菊,等. 线性模型引论[M]. 北京:科学出版社,2004:55-76.