

牙膏销售量问题的微分方程模型

◎王智峰 陈传军 孙丰云 (烟台大学数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

【摘要】针对牙膏销售量问题,本文改进了回归分析模型,建立了微分方程模型进行销售量的预测,最后给出了灵敏度分析和稳定性分析.

【关键词】牙膏销售量;微分方程模型;回归分析模型

【基金项目】高等学校大学数学教学研究与发展中心资助(No.CMC20190408),烟台大学教学改革研究项目资助(No.jyxm2019041),山东省高等教育本科教改项目(No.Z2018S049)

一、引言

在姜启源、谢金星、叶俊编著的《数学建模》^[1] (第四版)的第十章中,提出了牙膏销售量问题.已知的数据包括三部分:某厂家的价格与其他厂家的价格差,广告投入,牙膏销售量.问题要求建立预测牙膏销售量的数学模型.书中针对已知数据进行分析,如下图1-2所示,销售量和价格差成线性关系,销售量与广告费用成二次函数关系.

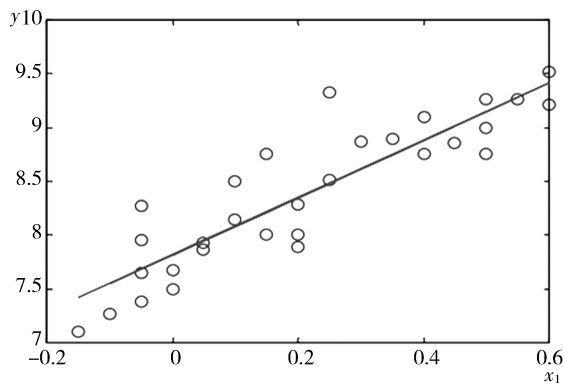


图1 销售量与价格差散点图(线性关系)

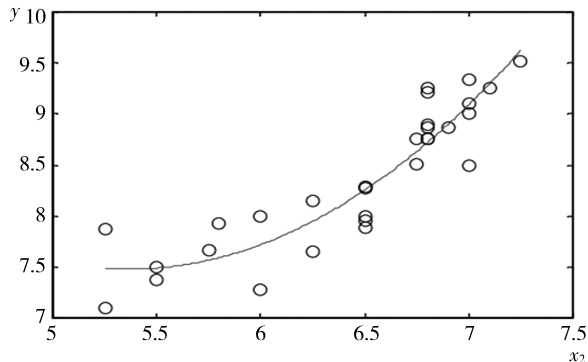


图2 销售量与广告费散点图(二次关系)

基于以上的数据分析,书中建立了销售量 y 与价格差 x_1 、广告费用 x_2 之间的多元线性回归分析模型为:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 \quad (1)$$

其中 $\beta_i, i=0, \dots, 3$ 是回归系数.

利用数学软件 matlab^[2] 或 SPSS^[3], 结合已有的数据可以估计出回归系数,得到预测销售量的回归分析模型为:

$$y = 17.3 + 1.3x_1 - 3.7x_2 + 0.3x_2^2 \quad (2)$$

分析模型(2)可知:随着 x_2 增大,销售量 y 会越来越大.当 x_2 趋于无穷时,销售量 y 也趋于无穷.这个显然不符合实际情况,因为销售量会受市场影响,最终会达到市场饱和状态,而不会趋于无穷.接下来我们对模型进行改进.

二、模型改进

随着广告费用 x_2 的增加,销售量 y 会达到市场饱和量,这个变化趋势与人口预测问题中的阻滞增长模型相似,因此我们使用微分方程模型来研究这个问题.

以广告费用 x_2 为自变量,价格差 x_1 为已知的变量,销售量为因变量,结合阻滞增长模型,建立如下微分方程模型为:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx_2} = (a + bx_1)y \left(1 - \frac{y}{y_m}\right) \\ y(0, 5.5) = 7.5 \end{cases} \quad (3)$$

其中 y_m 代表市场饱和量, a, b 是待定系数.

根据已知的数据,结合 matlab^[2] 软件可以得到待定系数 a, b 以及市场饱和量 y_m 的估计值,因此销售量 y 与价格差 x_1 、广告费用 x_2 之间的关系式如下所示:

$$y = \frac{149.2e^{(x_2(0.03+0.31x_1))}}{19.9+15e^{(x_2(0.03+0.31x_1))-15}} \quad (4)$$

其中 $y_m = 9.95$.

利用牙膏销售量模型的解析解表达式(4)式,结合已知的价格差 x_1 、广告费用 x_2 的数据,对销售量 y 进行预测.

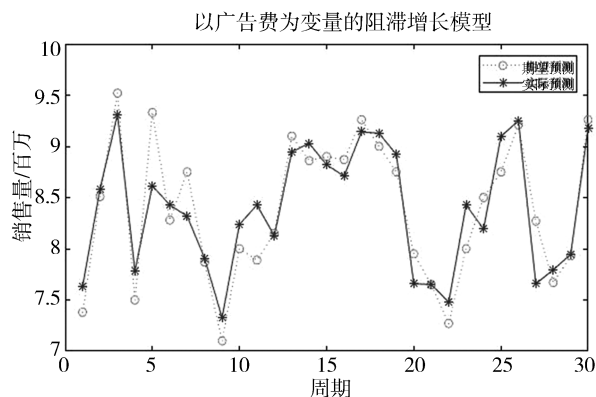


图3 改进后模型的预测图

在上图3中,绿色代表已有的销售量数据,曲线代表将已有的价格差、广告费的数据后代入表达式(4)中,计算出来的销售量的预测值.由图3可知,微分方程模型可以很好地描述销售量的变化趋势,并能刻画出销售量随着时间周期变化的情况.

三、模型检验

在使用模型解决问题之前,需要对模型进行检验分析.微分方程模型(3)的检验主要包括稳定性分析和灵敏度分析两个方面.首先我们根据定性分析^[4]方法给出稳定性分析.

微分方程模型(3)的右端项不显含自变量 x_2 ,因此模型(3)属于一维自治系统,我们使用自治系统的稳定性原理进行分析.

我们记右端项为

$$F(y) = (a + bx_1)y \left(1 - \frac{y}{y_m}\right) \quad (5)$$

令 $F(y) = 0$,可得两个平衡点为:

$$y_1 = y_m \text{ 或 } y_2 = 0.$$

现分析右端项的一阶导数在两个平衡点处的符号:

$$(1) \text{ 当 } x_1 < -\frac{c}{k} = -0.09,$$

$$F'(0) = (a + bx_1) < 0$$

$$(2) \text{ 当 } x_1 > -\frac{c}{k} = -0.09,$$

$$F'(y_m) = -(a + bx_1) < 0$$

结合稳定性原理可知:当价格差大于 -0.09 时,销售量随着广告费用的增加,最终会稳定在市场饱和值 y_m .如果价格差小于 -0.09 ,即比别的厂家价格高很多的时候,虽然广告费用不断增加,但是最终的销售量仍然会趋于0.这个结论是比较符合市场规律的,说明本文建立的微分方程模型

可以很好地刻画实际情况,也克服了回归分析模型销售量随着广告费增加而趋于无穷的弊端.

然后我们结合微分方程的解析解(4)式,进行关于价格差 x_1 的灵敏度分析如下图4所示:

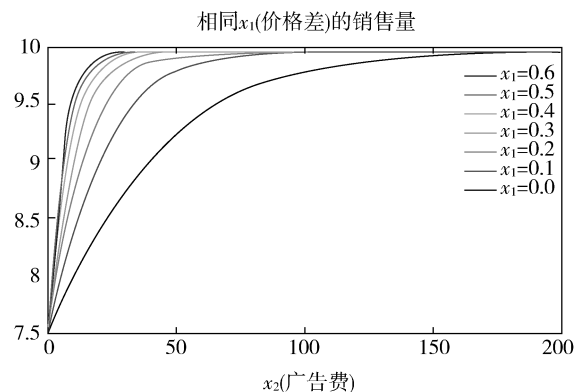


图4 价格差的灵敏度分析

在图4中,我们取不同的价格差 $x_1 = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6]$,画出牙膏销售量 y 随着广告费用 x_2 的变化曲线.当价格差一定时,随着广告费用 x_2 的增加,销售量会逐渐趋于稳定,到达饱和值 y_m .当广告费用投入比较少时,价格越实惠,销售量就越大.当广告费用比较大的时候,价格差的作用就比较小了,销售量会更快地达到饱和值 y_m .这个结论也是符合市场规律的.

四、结论

结合牙膏销售量、价格差、广告费三组数据,本文分析了回归分析模型的不足之处.根据牙膏销售量最终会趋于市场饱和量的市场规律,建立了基于阻滞增长模型的微分方程模型,使用已有的三组数据对模型中的未知参数进行了点估计,得到牙膏销售量的预测模型.最后对模型进行了稳定性分析和灵敏度分析,得到模型是符合市场客观规律的结论.

【参考文献】

- [1] 姜启源,谢金星,叶俊. 数学模型(第四版)[M].北京:高等教育出版社,2011.
- [2] 司守奎,孙兆亮. 数学建模算法与应用(第二版)[M].北京:国防工业出版社,2015.
- [3] 周静. SPSS在数学建模中的应用实例[J].天津职业院校联合学报,2012. 14(011):93-96.
- [4] 赵静,但琦. 数学建模与数学实验(第4版)[M].北京:高等教育出版社,2014.