

学号： 201200363004

分类号： O241.82

烟台大学

硕士学位论文

抛物型方程有限体积元方法的两类算法

Two algorithms of
finite volume element method
for parabolic equations

研究生姓名： 赵 鑫

指导教师： 陈传军 副教授

学科门类： 理 学

专业名称： 计算数学

论文提交日期： 2015年06月03日

烟台大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：

日期： 2015年 06月 03日

学位论文使用授权说明

本人完全了解烟台大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务；学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；在非保密的论文范围内，学校可以公布论文的部分或全部内容。

（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名：

导师签名：

日期： 2015年 06月 03日

摘 要

有限体积元法, 在国内又被称为广义差分法, 自1982年被李荣华教授提出以来, 由于其计算量减少, 程序易于实现, 而且能够保持物理量的局部守恒性, 故其在计算流体力学、固体力学及等领域有着广泛的应用.

本文主要作了以下的工作:

(1) 以下的一维非线性抛物方程的有限体积元及两重网格算法

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(A(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(u, x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T].$$

关于非线性抛物方程建立有限体积元格式, 在分析其有限体积元解的存在性时, 借助于Brouwer不动点定理, 引入算子 \mathcal{J}_h . 如果算子 \mathcal{J}_h 有不动点 v^* , 那么 $U_h^n = v^*$ 即为有限体积元格式的解. 而根据Brouwer不动点定理, 需证明算子 \mathcal{J}_h 有界. 这可以根据所假设的系数及右端项满足lipschitz条件以及P. Chatzipantelidis等人在[21, 22, 23]中所证明的有限体积元格式(FVEM)与有限元格式(FEM)之间的区别, 并加以简单估计即可得到算子的有界性. 两重网格是关于非线性方程的一种离散技巧, 它有两重不同的网格. 其主要思想为在粗网格上得到一个对于真解的大致逼近, 然后用这个大致逼近作为细网格上的初始假设. 这种方法包含两步: 第一步在粗网格上求解非线性方程; 第二步在细网格上将非线性方程转化为线性方程进行求解.

在证明有限体积元的收敛性时, 可以参考有限元方法的证明, 如V. Thomée在其书[37]《Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems》所述, 构造椭圆算子 R_h , 令 $w_h^n = R_h u^n$, 将误差分成两部分, 其中一部分由椭圆算子的性质可以得到其估计, 只有另一部分还需估计. 而两重网格的收敛性估计可以参考陈传军所作的论文[5, 6]中所证, 将右端项在粗网格解处Taylor展开. 借助于上述有限体积元的分析结果即可得到两重网格的结果.

在做数值算例时, 对比了V. Thomée, P. Chatzipantelidis以及在求解非线性方程组中广泛应用的Broyden拟Newton迭代法, 发现V. Thomée提出的方法更适用于求解此类非线性抛物方程. 在得到两重网格的数值结果后, 发现其工作时间更短, 从而更加有效. 在本文中我们证明了有限体积元解 L^2 -模和 H^1 -模的最优阶估计, 以及两重网格 H^1 -模的最优阶收敛性. 该收敛性表明粗网格的尺寸可以比细网格的粗得很. 但是当网格的尺寸满足 $h = O(H^2)$ 时, 我们可以得到最优的渐近逼近解. 给出数值算例验证了理论结果.

(2) 在本文中, 我们也研究了抛物方程有限体积元的残量型后验误差估计,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (a(x, t) \nabla u) = f(x, t), \quad \Omega \times (0, T].$$

对空间 Ω 做正则三角形剖分 \mathcal{T}_h [33], 初始剖分 \mathcal{T}_h 的重心型对偶剖分 \mathcal{T}_h^* . 试探函数空间 \mathcal{U}_h 取为相应于三角剖分 \mathcal{T}_h 的分片线性空间. 检验函数空间 \mathcal{V}_h 取为相应于对偶剖分 \mathcal{T}_h^* 的分片常数空间. 在此基础上构造了上述抛物方程的全离散向后Euler有限体积元格式.

建立了残量型后验误差估计子 η^n :

$$R_K = f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} + \nabla \cdot (a(x) \nabla U_h^n), \quad R_E = -[a(x) \nabla U_h^n]_E,$$

$$\eta_R^n = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_J^n = \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\eta^n = \left((\eta_R^n)^2 + (\eta_J^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

并证明了其依赖性、有效性的上下界. 在证明其上界时, 参考陈志明等人的文章[48]的做法, 通过运用Scott-Zhang插值函数的性质以及迹定理可得其后验误差估计中上界的证明. 在证明其下界的过程中, 借助于bubble-函数的性质, 参考毕春加的论文[3], 利用三角不等式, 可得其下界. 在数值算例中, 可以发现所构造的误差估计子可以用来预测真实误差的大小. 在实际计算中, 残量型后验误差估计子可被用来评估有限体积元方法的精度.

关键词: 有限体积元方法; 两重网格; 非线性; 抛物方程; 后验误差估计; 误差的上下界; 拟Newton方法

Abstract

There are two parts in this paper.

(1) In this paper, a two-grid finite volume element approximation for the following one-dimensional nonlinear parabolic equations is derived and studied.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(A(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(u, x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T].$$

We develop a finite volume element approximation for one-dimensional nonlinear parabolic equations and study its existence and error analysis. To prove the finite volume element approximation's existence, we introduce operation \mathcal{J}_h . If \mathcal{J}_h has a fixed point v^* , then $U_h^n = v^*$ is the solution. We employ Brouwer's fixed point theorem to prove that the operation \mathcal{J}_h is bounded. On the condition the coefficient $A(u)$ is a bounded smooth function with positive upper and lower bounds and $A(u)$, $A'(u)$, $f(u, x, t)$ are Lipschitz continuous with respect to the variable u , combining with the difference between FVEM and FEM proved by P. Chatzipantelidis et al. [21, 22, 23], we get its existence by simple calculation.

Two-grid method is a discretization technique for nonlinear equations based on two grids of different sizes. The main idea is to use a coarse grid space to produce a rough approximation for the solution of nonlinear problems and then use it as the initial guess on the fine grid. This method involves a nonlinear solution in the coarse grid with grid size H and a linear solution on the fine grid with grid size h ($h < H$), respectively.

For finite volume element approximation's error analysis, we refer to finite element approximation's error analysis as V. Thomée[37]. Define the elliptic projection R_h . Let $u^n = u(t_n)$ and $w_h^n = R_h u^n$, then

$$U_h^n - u^n = (U_h^n - w_h^n) + (w_h^n - u^n) \equiv \theta^n + \rho^n.$$

In view of the property of R_h , it remains to bound θ^n . When we analyse the error estimate between the two-grid solution and the exact solution, we use the idea from chen[5, 6]. For the term f , by Taylor's expansion at U_H^n . Optimal error estimates in the L^2 -norm and H^1 -norm are proved. Optimal error estimate in the H^1 -norm is proved for the two-grid method. It is shown that the coarse grid can be much coarser than the fine grid. However, we can achieve asymptotically optimal approximation when the size of grids satisfies $h = O(H^2)$. Numerical examples are presented to verify the theoretical results.

(2) In this paper, residual-type a posteriori error estimates are studied for finite volume element method of the following parabolic equations.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (a(x, t) \nabla u) = f(x, t), \quad \Omega \times (0, T].$$

Let \mathcal{T}_h denote the primal triangulation of Ω . We assume that \mathcal{T}_h is quasi-uniform or regular [33]. We construct a barycenter-type dual partition \mathcal{T}_h^* of the original triangulation \mathcal{T}_h , whose elements are called control volumes. Define the trial space \mathcal{U}_h associated with \mathcal{T}_h to be a conforming linear finite element space. We choose the piecewise constant on dual partition \mathcal{T}_h^* as the test space. Thereby we construct the fully discrete backward Euler finite volume element method for the above parabolic equations.

We define the function R_K, R_E, η^n by

$$R_K = f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} + \nabla \cdot (a(x)\nabla U_h^n), \quad R_E = -[a(x)\nabla U_h^n]_E,$$

$$\eta_R^n = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_J^n = \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

where h_E is the measure of E . The residual-type posteriori error estimator η^n is constructed as

$$\eta^n = \left((\eta_R^n)^2 + (\eta_J^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

The reliable and efficient bounds for the error estimator are established. The residual-type posteriori error estimator can be used to assess the accuracy of the finite volume element solutions in the practical applications. Some numerical examples are provided to confirm the theoretical results.

Keywords: finite volume element method; two-grid; nonlinear; parabolic equation; A posteriori error estimate; Error bounds; quasi-Newton method

目录

摘要	I
Abstract	III
第1章 绪论	1
1.1 有限体积元的思想及其特点	1
1.2 国内外的研究现状	2
1.3 本文的目的	3
第2章 一维非线性抛物方程有限体积元及两重网格算法	4
2.1 有限体积元及两重网格算法的构建	4
2.2 本章所用的引理及有限体积元解的存在性	7
2.3 有限体积元及两重网格解的收敛性	9
2.4 数值算例	17
第3章 抛物方程有限体积元算法的后验误差估计	22
3.1 有限体积元格式的构建及所用的引理	22
3.2 后验误差估计的上界	24
3.3 后验误差估计的下界	28
3.4 数值算例	31
参考文献	33
攻读学位期间发表的学术论文目录	37
致谢	38
版权声明	39

第1章 绪论

本文主要研究了抛物型方程有限体积元方法的两类算法. 首先我们简单介绍一下有限体积元方法.

1.1 有限体积元的思想及其特点

讨论有限体积元算法, 就不得不提有限元方法. 因而我们首先介绍一下有限元方法的基本思路. 有限元方法是20世纪60年代出现的一种数值计算方法. 它最初用于固体力学问题的数值计算, 如杆系机构, 梁系结构, 板、壳、体结构的受力和变形问题. 20世纪70年代在英国科学家Zienkiewicz O. C.等人的努力下, 将它推广到各类场问题的数值求解, 如温度场、电磁场, 也包括流场. 有限元离散方程的获得方法主要有直接刚度法、虚功原理推导、泛函变分原理推导或加权余量法推导. 其中变分原理是将微分方程求解问题转化为积分方程, 在对积分方程进行一定的运算得到有限元离散方程, 它被用于各类场问题的有限元离散方程的推导.

以椭圆方程为例, 简述一下有限元的基本思路

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (p\nabla u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

微分方程两端乘以 v (v 属于解空间 \mathcal{U})并积分, 得

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (p\nabla u) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

其中, 由Green公式得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\nabla \cdot (p\nabla u) v d\Omega &= - \int_{\partial\Omega} (p\nabla u) \cdot \mathbf{n} v ds + \int_{\Omega} (p\nabla u) \cdot \nabla v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (p\nabla u) \cdot \nabla v d\Omega \quad (v|_{\partial\Omega} = 0) \end{aligned}$$

令

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (p\nabla u) \cdot \nabla v d\Omega$$

则

$$a(u, v) = (f, v).$$

设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 是有限元空间 $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ 的一组基, 则数值解 U_h 可以表示成:

$$U_h = \sum_{i=1}^n U_{hi} \varphi_i$$

从而

$$\begin{aligned} a(U_h, V_h) &= (f, V_h) \quad \forall V_h \in \mathcal{U}_h \\ \Leftrightarrow a(U_h, \varphi_j) &= (f, \varphi_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n U_{hi} a(\varphi_i, \varphi_j) &= (f, \varphi_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

其中 U_h 被称为试探函数, V_h 被称为检验函数. 上式写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_n) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{h1} \\ \vdots \\ U_{hn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

恰当选取基函数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 使系数矩阵便于求解.

相对于有限元方法, 有限体积元方法的不同之处在于检验函数 V_h 的选择上. 有限体积元算法对初始剖分做对偶剖分, 在对偶剖分上取分片常数空间作为检验函数空间. 具体做法在下面的章节里会详细论述, 或参考李荣华等人所著的[30].

有限体积元方法是现代科学计算领域中求解微分方程的一种重要的数值计算方法, 它的构造和性质介于有限差分 and 有限元方法之间.

主要特点为:

- (1) 具有有限元方法的灵活性, 易于处理复杂区域和边界条件;
- (2) 具有类似有限差分方法的格式简单性;
- (3) 方法的定义采用变分形式, 可以从变分形式出发进行理论分析;
- (4) 计算量比有限元方法小, 收敛阶和有限元方法相同;
- (5) 能够保持某些物理量(如质量、动量)的局部守恒性质.

基于上述特点和优势, 现在有限体积元方法已经被广泛地应用于流体力学、固体力学、电磁学和石油勘探采集工业等科学工程计算领域. 有限体积元方法最初被命名为广义差分法(Generalized difference method), 最早是由李荣华于1982年在求解两点边值问题时提出, 可以认为是一种广义Galerkin方法或广义Petrov-Galerkin方法. 随后李荣华和国内许多专家学者对有限体积元方法的进行了广泛深入地研究, 获得了丰富的研究成果, 已经被用来数值求解椭圆型方程、抛物型方程、双曲型方程等数学物理方程.

1.2 国内外的研究现状

我们主要对将要研究的问题叙述一下国内外的研究现状.

对于非线性方程的两重网格算法最初是由许进超关于线性(非对称或非定)和非线性椭圆方程所作的论文[14, 15]中提出的. 后来该方法被广泛研究. 例如[8]中对有限差分两重网格的研究, [9, 19, 41, 42, 43, 17]对于有限元和混合有限元两重网格的研究. 对于有限体积元两重网格的研

研究工作有许多, 例如毕春加等人[2]对于线性和非线性椭圆方程有限体积元两重网格算法的研究, 陈传军等人所做的论文[5, 6]中对于非线性及半线性抛物方程有限体积元两重网格的研究, 张通等人[36]关于非线性对流扩散方程半离散有限体积元格式的研究. 但是到目前为止, 关于一维非线性抛物方程的有限体积元两重网格算法的研究很少.

有限元法的后验误差估计在过去的几十年里被广泛地研究, 并得到了一些重要的结果. 后验误差估计是自适应网格算法的根本所在. 自从Babuška和Rheinboldt[12]开创性的工作, 基于后验误差估计的自适应有限元方法便成为科学及工程计算领域的中心课题. 我们推荐[20, 38, 31, 32]作为后验误差估计的详细论述. 另外, 需要特别提及陈志明等人所做的有效的自适应程序[48]、[47]. 在[46]中陈志明研究了线性抛物方程的具有依赖性、有效性的自适应有限元格式, 并在计算机程序中实现了该算法.

但是, 据我们所知, 关于抛物方程有限体积元法的后验误差估计所作的研究工作很少, 只有少数几个结果得到. 例如Lazarov和Tomov[27, 29]研究了对流扩散反应方程的后验误差估计及自适应有限体积元算法, Carstensen、Lazarov以及Tomov[4]研究了广义椭圆问题非迎风格式的有限体积元的残量型后验误差估计, 许进超等人[16]分析了二阶椭圆方程的一种新的自适应有限体积元格式, Bi和Ginting[3]对于准线性椭圆问题建立了有限体积元的后验误差估计, 以及叶秀[40]关于二阶椭圆方程所建立的广义残量型后验误差估计子.

1.3 本文的目的

在本文中我们研究了两类问题:

- (1) 一维非线性抛物方程有限体积元及两重网格算法.
- (2) 抛物方程有限体积元算法的后验误差估计.

对于一维非线性抛物方程有限体积元及两重网格算法, 我们证明了有限体积元解的存在性, 分析了离散格式的收敛性, 分别得到 L^2 -和 H^1 -模的最优收敛阶. 对于两重网格算法, 得到最优的 H^1 -模的最优收敛阶. 从理论分析中可以发现两重网格算法提高了 H^1 -模的收敛阶. 通过数值算例, 我们对理论结果进行了验证. 可以发现两重网格在求解非线性问题有较好的收敛性, 比有限体积元法节省了大量的工作时间, 更加有效, 从而可以广泛应用该方法来求解非线性方程.

我们建立了抛物方程的残量型有限体积元的后验误差估计子, 证明后验误差估计中的上、下界, 并给出数值算例来观察误差估计子预测真实误差的表现. 可以看到随着网格变细, 误差估计子与真实误差之间的比值趋向于某个常数. 这说明误差估计子与真实误差有相同的收敛性. 从而误差估计子可以用来预测真实误差的大小.

特别说明: 在下面的章节中常数 C 在不同的环境下有不同的含义.

第2章 一维非线性抛物方程有限体积元及两重网格算法

这一章我们讨论下述一维非线性抛物方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(A(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(u, x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(a, t) = \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0, & t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $T > 0$ 是最终时刻, $\Omega = [a, b]$.

首先定义实数 \mathbb{R} 上的有界集:

$$G = \{u : |u| \leq K_0\},$$

此处的 K_0 是一个正常数. 假设系数 $A(u)$ 是有界光滑的函数, 有正的上、下界. 并且 $A(u)$, $A'(u)$, $f(u, x, t)$ 关于 u 是 Lipschitz-连续的, 即

$$|g(u) - g(v)| \leq L|u - v|, \quad \forall u, v \in G, \quad (g = A, A', f). \quad (2.2)$$

其中 L 是一个正常数, 通常被称为 Lipschitz 常数.

两重网格是关于非线性方程的一种离散技巧, 它有两重不同的网格. 其主要思想是在粗网格上得到一个对于真解的大致逼近, 然后用这个大致逼近作为细网格上的初始假设. 这种方法包含两步: 第一步在粗网格上求解非线性方程; 第二步在细网格上将非线性方程转化为线性方程进行求解. 由于只在粗网格上求解非线性方程, 从而省去大量的迭代过程. 在下面具体的论述中将会看到两重网格算法在求解非线性方程中非常有效.

2.1 有限体积元及两重网格算法的构建

我们采用 Sobolev 空间的标准记号 $W^{s,p}(\Omega)$ 来表示空间 $L^p(\Omega)$ 中有 s 阶广义导数的函数构成的子空间. 空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 的模如下定义:

$$\|u\|_{s,p} = \left(\int_a^b \sum_{i=0}^s |D_x^i u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

为了简化该记号, 我们记 $H^s = H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$, 其中 $\Omega = [a, b]$, 在其模的记号中删掉指标 2 和 Ω , 即 $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{s,2} = \|\cdot\|_{s,2,\Omega}$. 同样的 $W^{s,p}$ 及 H^s 中的半模定义如下:

$$|u|_{s,p} = \left(\int_a^b |D_x^s u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad |u|_{s,2} = |u|_s.$$

用 (\cdot, \cdot) 、 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 空间中的内积和模, 用 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 $L^\infty(\Omega)$ 上的模.

下面我们开始介绍有限体积元方法. 首先将区间 $\Omega = [a, b]$ 剖分成 N 个子区间, 其节点为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_N = b.$$

定义 $h_i = x_i - x_{i-1}$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 以及 $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. 用 $T_h = \{I_i\}_{i=1}^N$ 表示这种剖分, 子区间 I_i 被称为有限单元. 假设初始剖分是正则的, 即存在正常数 C , 使得

$$h_i \geq Ch, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

成立.

其次介绍对偶剖分 T_h^* : 取剖分节点为 $x_{i-\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2, \dots, N$:

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2};$$

即

$$a = x_0 = x_{-\frac{1}{2}} < x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{i-\frac{1}{2}} < \cdots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = x_N = b.$$

令 $I_0^* = [x_0, x_{\frac{1}{2}}]$, $I_i^* = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $1 \leq i \leq N-1$, $I_N^* = [x_{N-\frac{1}{2}}, x_N]$. 所有的子区间 I_i^* ($0 \leq i \leq N$) 构成区间 $\Omega = [a, b]$ 的对偶剖分 T_h^* , 子区间 I_i^* 被称为控制体积.

定义解空间 \mathcal{U}

$$H_E^1(\Omega \times [0, T]) = \left\{ u(x, t) \in H^1(\Omega \times [0, T]) \mid u(a, t) = \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0 \right\}.$$

$$\mathcal{U} = H_E^1(\Omega \times [0, T]) \cap H^2(\Omega \times [0, T]).$$

取试探函数空间 $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ 为关于区间 $\Omega = [a, b]$ 初始剖分上的分片线性函数空间, 则在点 x_i ($1 \leq i \leq N-1$)的基函数为

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - h_i^{-1}(x_i - x), & x_{i-1} \leq x < x_i, \\ 1 - h_{i+1}^{-1}(x - x_i), & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 1 - h_N^{-1}(x_N - x), & x_{N-1} \leq x \leq x_N, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而对任意的 $u_h \in \mathcal{U}_h$, 可以将 u_h 表示成 $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x)$, 此处 $u_i = u_h(x_i)$.

取检验函数空间 \mathcal{V}_h 为对偶剖分 T_h^* 上的分片常数函数空间. 其区间 $I_i^* = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ ($1 \leq i \leq N-1$)上的特征函数 $\varphi_i^*(x)$ 定义为

$$\varphi_i^*(x) = \begin{cases} 1, & x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\varphi_N^*(x) = \begin{cases} 1, & x_{N-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_N, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

从而对任意的 $v_h \in \mathcal{V}_h$, 可以将 v_h 表达称 $v_h = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i^*(x)$, 其中 $v_i = v_h(x_i)$.

由于假设剖分是正则的, 从而下列逆不等式成立[33]:

$$\left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\| \leq Ch^{-1} \|\chi\|, \quad \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\|_{\infty} \leq Ch^{-1} \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\|, \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_h. \quad (2.3)$$

下面我们开始构建(2.1)具体的有限体积元格式. 问题(2.1)的变分形式为: 寻找 $u \in \mathcal{U}$ 满足

$$(u_t, v) + a(u; u, v) = (f(u, x, t), v), \quad \forall v \in \mathcal{U}, \quad t > 0, \quad (2.4)$$

其中 $(f, g) = \int_a^b fg dx$, $\|w\| = (w, w)$,

$$a(u; u, v) = \int_a^b A(u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

问题(2.1)的有限元格式(FEM)为: 确定 $u_h \in \mathcal{U}_h$ 满足

$$(u_{h,t}, v_h) + a(u_h; u_h, v_h) = (f(u_h, x, t), v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{U}_h, \quad t > 0, \quad (2.5)$$

此处

$$a(u_h; u_h, v_h) = \int_a^b A(u_h) \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} dx.$$

而问题(2.1)的有限体积元格式(FVEM)为: 寻找 $u_h \in \mathcal{U}_h$ 满足

$$(u_{h,t}, v_h) + a(u_h; u_h, v_h) = (f(u_h, x, t), v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \quad t > 0, \quad (2.6)$$

其中

$$a(u_h; u_h, v_h) = - \sum_{i=1}^N v_h(x_i) \left(A(u_h) \frac{\partial u_h}{\partial x} \Big|_{I_i^*} \right).$$

我们介绍插值算子 $\Pi_h: \mathcal{U}_h \rightarrow \mathcal{V}_h$

$$\Pi_h w = \sum_{i=1}^N w(x_i) \varphi_i^*(x), \quad \forall w \in \mathcal{U}_h$$

定义 $\varepsilon_a(\cdot; \cdot, \cdot)$ (有限体积元格式(FVEM)与有限元格式(FEM) 之间的区别) 如下:

$$\varepsilon_a(\varrho; u_h, v_h) = a(\varrho; u_h, \Pi_h v_h) - a(\varrho; u_h, v_h) \quad \forall \varrho, u_h, v_h \in \mathcal{U}_h.$$

以及 $\varepsilon(\cdot, \cdot)$

$$\varepsilon(\vartheta, \sigma) = (\vartheta, \Pi_h \sigma) - (\vartheta, \sigma).$$

此外定义 \mathcal{U}_h 上的另一种内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = (\Phi, \Pi_h \Psi), \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{U}_h.$$

相应的模 $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle$. 由[35], $\|\cdot\|$ 等价于 $\|\cdot\|$.

借助于上述记号, 可将(2.6)改写成

$$\langle u_{h,t}, \chi \rangle + a(u_h; u_h, \Pi_h \chi) = (f(u_h, x, t), \Pi_h \chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_h \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

在这一章中我们讨论问题(2.1)的全离散有限体积元格式. 为了定义全离散格式, 我们将时间项按 $\Delta t = \frac{T}{J}$ 的步长进行离散, 此处的 J 是一个正整数. 记 $t^n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, J$, $U_h^n = U_h(t^n)$.

从而全离散向后Euler有限体积元格式如下定义:

$$\left\langle \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \chi \right\rangle + a(U_h^n; U_h^n, \Pi_h \chi) = (f(U_h^n, x, t^n), \Pi_h \chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_h, \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

借助于记号 $\bar{\partial}U^n = \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}$, (2.8)可被改写成:

$$\langle \bar{\partial}U^n, \chi \rangle + a(U_h^n; U_h^n, \Pi_h \chi) = (f(U_h^n, x, t^n), \Pi_h \chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_h, \quad t \geq 0.$$

而两重网格有限体积元方法分为两步:

第一步、在粗网格 T_H 上寻找 $U_H \in \mathcal{U}_H$, 满足

$$\langle \bar{\partial}U_H^n, \chi \rangle + a(U_H^n; U_H^n, \Pi_H \chi) = (f(U_H^n, x, t^n), \Pi_H \chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_H, \quad t \geq 0.$$

第二步、在细网格 T_h 上确定 $u_h \in \mathcal{U}_h$, 满足

$$\langle \bar{\partial}u_h^n, \chi \rangle + a(U_H^n; u_h^n, \Pi_h \chi) = (f(U_H^n) + f'(U_H^n)(U_h^n - U_H^n), \Pi_h \chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_h, \quad t \geq 0.$$

借助于第一步中得到的粗网格上的解以及将 f 在粗网格上的解做Taylor展开式, 在第二步中将非线性问题转化成线性问题去求解, 从而将问题简单化.

2.2 本章所用的引理及有限体积元解的存在性

为了讨论有限体积元及两重网格算法的误差分析, 我们给出下述引理. 根据[30, 35, 10], 以下两个引理成立.

引理2.1 对任意的 $u_h, v_h \in \mathcal{U}_h$, 存在与 h 无关的正常数 C , 使得

$$(u_h, \Pi_h v_h) = (v_h, \Pi_h u_h), \quad (u_h, \Pi_h v_h) \leq C \|u_h\| \|v_h\|.$$

引理2.2 对任意的 $\omega_h, u_h, v_h \in \mathcal{U}_h$, 存在与 h 无关的正常数 α, C , 满足

$$\alpha \|u_h\|_1^2 \leq a(\omega_h; u_h, \Pi_h u_h), \quad a(\omega_h; u_h, \Pi_h v_h) \leq C \|u_h\|_1 \|v_h\|_1.$$

在[21, 22, 23]中, P. Chatzipantelidis证明了以下引理.

引理2.3 对任意的 $\vartheta \in H^1$, $\sigma \in \mathcal{U}_h$, 有

$$|\varepsilon(\vartheta, \sigma)| \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\|,$$

$$|\varepsilon(\vartheta, \sigma)| \leq C \|\vartheta\| \|\sigma\|.$$

引理2.4 对任意的 $\varrho, u_h, v_h \in \mathcal{U}_h$, 存在与 h 无关的正常数 C , 使得

$$|\varepsilon_a(\varrho; u_h, v_h)| \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial \varrho}{\partial x} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right\|.$$

引理2.5 对任意的 $\chi, \varphi \in \mathcal{U}_h$, 存在与 h 无关的正常数 C , 满足

$$|\varepsilon_a(\nu; \varphi, \chi) - \varepsilon_a(\omega; \varphi, \chi)| \leq Ch \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|_{\infty} \left(1 + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\|_{\infty} \right) \left\| \frac{\partial}{\partial x}(\nu - \omega) \right\| \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\|.$$

定义椭圆算子 $R_h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_h$:

$$a(u; R_h u, \chi) = a(u; u, \chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_h. \quad (2.9)$$

在[37]中, V. Thomée证明了下述重要的引理.

引理2.6 令 $w_h = R_h u$, $\rho = w_h - u$, 存在与 h 无关的正常数 C , 使得

$$\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x} \right\|_{\infty} \leq C(u), \quad \|\rho\| \leq C(u)h^2, \quad \left\| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\| \leq C(u)h, \quad \|\rho\|_{0,\infty} \leq Ch |\ln h| \|u\|_{1,\infty}.$$

为了证明非线性抛物方程有限体积元解的存在性, 首先介绍算子 $\mathcal{J}_h : \mathcal{U}_h \rightarrow \mathcal{U}_h$ 定义如下: 对任意的 $v \in \mathcal{U}_h$, $\mathcal{J}_h v$ 满足以下等式

$$\langle \mathcal{J}_h v - U_h^{n-1}, \chi \rangle + \Delta t a(v; \mathcal{J}_h v, \Pi_h \chi) = \Delta t (f(v, x, t^n), \Pi_h \chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_h. \quad (2.10)$$

如果算子 \mathcal{J}_h 有不动点 v^* , 那么 $U_h^n = v^*$ 即为有限体积元格式(2.8)的解. 而根据Brouwer 不动点定理, 需证明算子 \mathcal{J}_h 有界.

定理2.1 假设条件(2.2)成立以及剖分是正则的, 则有限体积元格式(2.8)的解存在.

证: 我们想借助于Brouwer不动点定理, 还需证明

$$\| \mathcal{J}_h \mu - \mathcal{J}_h \omega \| < L \| \mu - \omega \|, \quad \forall \mu, \omega \in \mathcal{U}_h, \quad 0 < L < 1.$$

从(2.10), 对任意的 $\mu, \omega, \chi \in \mathcal{U}_h$, 有

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{J}_h \mu - \mathcal{J}_h \omega, \chi \rangle + \Delta t a(\mu; \mathcal{J}_h \mu, \Pi_h \chi) - \Delta t a(\omega; \mathcal{J}_h \omega, \Pi_h \chi) \\ & = \Delta t (f(\mu, x, t^n), \Pi_h \chi) - \Delta t (f(\omega, x, t^n), \Pi_h \chi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

在(2.11)中取 $\chi = \mathcal{J}_h \mu - \mathcal{J}_h \omega$, 得

$$\begin{aligned} \| \chi \|^2 + \Delta t a(\omega; \chi, \Pi_h \chi) & = \Delta t a(\omega; \mathcal{J}_h \mu, \Pi_h \chi) - \Delta t a(\mu; \mathcal{J}_h \mu, \Pi_h \chi) \\ & \quad + \Delta t (f(\mu, x, t^n) - f(\omega, x, t^n), \Pi_h \chi) \\ & = \Delta t (a(\omega; \mathcal{J}_h \mu, \chi) - a(\mu; \mathcal{J}_h \mu, \chi)) \\ & \quad + \Delta t (\varepsilon_a(\omega; \mathcal{J}_h \mu, \chi) - \varepsilon_a(\mu; \mathcal{J}_h \mu, \chi)) \\ & \quad + \Delta t (f(\mu, x, t^n) - f(\omega, x, t^n), \Pi_h \chi) \\ & \triangleq I + II + III. \end{aligned} \quad (2.12)$$

首先估计I项, 根据条件(2.2)以及Cauch-schwarz不等式, 得

$$\begin{aligned} a(\omega; \mathcal{J}_h\mu, \chi) - a(\mu; \mathcal{J}_h\mu, \chi) &= \int_a^b (A(\omega) - A(\mu)) \frac{\partial \mathcal{J}_h\mu}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x} dx \\ &\leq C_1 \left\| \frac{\partial \mathcal{J}_h\mu}{\partial x} \right\|_{\infty} \|\omega - \mu\| \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

对于II项, 利用引理2.5和逆不等式(2.3)

$$|II| \leq C_2 \Delta t h \left\| \frac{\partial(\mu - \omega)}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\| \leq C_2 \Delta t \|\mu - \omega\| \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\|. \quad (2.14)$$

对于III项, 根据条件(2.2)和Poincaré不等式, 有

$$|III| \leq C \Delta t \|\mu - \omega\| \|\chi\| \leq C \Delta t \|\mu - \omega\| \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\|. \quad (2.15)$$

将(2.13)、(2.14)、(2.15)代入(2.12), 并结合引理2.2

$$\|\chi\|^2 + \Delta t \bar{\alpha} \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\|^2 \leq C_3 \Delta t \|\mu - \omega\| \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\| \leq C_4 \Delta t \|\mu - \omega\|^2 + \Delta t \bar{\alpha} \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\|^2.$$

从而有 $\|\chi\| \leq C_5 \|\mu - \omega\|$. 注意 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|$ 等价, 当 Δt 充分小时, 即可得到想要的结果.

2.3 有限体积元及两重网格解的收敛性

在这一节, 我们研究一维非线性抛物方程有限体积元及两重网格算法的收敛性, 将分别以 L^2 -和 H^1 -模为距离进行讨论. 对于有限体积元算法, 我们证明了 L^2 -和 H^1 -模最优的误差估计, 表达为下述两个定理.

定理2.2 令 U_h^n 、 u^n 分别表示(2.8)及(2.4)的解, 假设 u 充分光滑, 则有

$$\|U_h^n - u^n\| \leq C(\Delta t + h^2).$$

证: 令 $u^n = u(t_n)$ 、 $w_h^n = R_h u^n$ (R_h 如(2.9)定义), 则

$$U_h^n - u^n = (U_h^n - w_h^n) + (w_h^n - u^n) \triangleq \theta^n + \rho^n.$$

考虑到引理2.6, 还需估计 θ^n . 对任意的 $\chi \in \mathcal{U}_h$

$$\begin{aligned} (\bar{\partial} \theta^n, \chi) + a(U_h^n; \theta^n, \chi) &= (\bar{\partial} U_h^n, \chi) + a(U_h^n; U_h^n, \chi) - (\bar{\partial} w_h^n, \chi) - a(U_h^n; w_h^n, \chi) \\ &= (f(U_h^n), \chi) + \delta - (u_t^n, \chi) - (\bar{\partial} w_h^n - u_t^n, \chi) \\ &\quad - a(u^n; w_h^n, \chi) - [a(U_h^n; w_h^n, \chi) - a(u^n; w_h^n, \chi)], \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中

$$\delta = \varepsilon(f, \chi) - \varepsilon(\bar{\partial} U_h^n, \chi) - \varepsilon_a(U_h^n; U_h^n, \chi) = \varepsilon(f - \bar{\partial} U_h^n, \chi) - \varepsilon_a(U_h^n; U_h^n, \chi).$$

参考 R_h 的定义式(2.9), 可以发现

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}\theta^n, \chi) + a(U_h^n; \theta^n, \chi) &= (f(U_h^n) - f(u^n), \chi) + \delta - (\bar{\partial}\rho^n, \chi) - (\bar{\partial}u^n - u_t^n, \chi) \\ &\quad - [a(U_h^n; w_h^n, \chi) - a(u^n; w_h^n, \chi)]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

在(2.17)中取 $\chi = \theta^n$, 利用(2.2)以及引理2.6中的 $\frac{\partial w_h^n}{\partial x}$ 的有界性, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{\partial}\|\theta^n\|^2 + \mu\left\|\frac{\partial\theta^n}{\partial x}\right\|^2 &\leq C(\|U_h^n - u^n\|)\left(\|\theta^n\| + \left\|\frac{\partial\theta^n}{\partial x}\right\|\right) + \\ &\quad (\|\bar{\partial}\rho^n\| + \|\bar{\partial}u^n - u_t^n\|)\|\theta^n\| + |\delta|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

借助于引理2.3、2.4, 得到

$$|\delta| \leq Ch^2\left\|\frac{\partial\theta^n}{\partial x}\right\|.$$

利用 ε -Cauchy不等式并恰当选取 ε , 使得

$$\bar{\partial}\|\theta^n\|^2 + \mu\left\|\frac{\partial\theta^n}{\partial x}\right\|^2 \leq C(\|\theta^n\|^2 + E_n) + \frac{\mu}{2}\left\|\frac{\partial\theta^n}{\partial x}\right\|^2,$$

此处

$$E_n = \|\rho^n\|^2 + \|\bar{\partial}\rho^n\|^2 + \|\bar{\partial}u^n - u_t^n\|^2 + h^4.$$

从而两边同时减掉 $\frac{\mu}{2}\left\|\frac{\partial\theta^n}{\partial x}\right\|^2$, 得

$$\bar{\partial}\|\theta^n\|^2 + \mu\left\|\frac{\partial\theta^n}{\partial x}\right\|^2 \leq C(\|\theta^n\|^2 + E_n).$$

这说明

$$(1 - C\Delta t)\|\theta^n\|^2 \leq \|\theta^{n-1}\|^2 + C\Delta t E_n.$$

或写成

$$\|\theta^n\|^2 \leq (1 + C\Delta t)\|\theta^{n-1}\|^2 + C\Delta t E_n. \quad (2.19)$$

重复(2.19)的过程, 并注意 $\theta^0 = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \|\theta^n\|^2 &\leq (1 + C\Delta t)^n \|\theta^0\|^2 + C\Delta t \sum_{j=1}^n (1 + C\Delta t)^{n-j} E_j \\ &= C\Delta t \sum_{j=1}^n (1 + C\Delta t)^{n-j} E_j. \end{aligned} \quad (2.20)$$

由引理2.6的结果, $\|\rho^j\| \leq C(u)h^2$,

$$\|\bar{\partial}\rho^j\| = \left\|\Delta t^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \rho_t ds\right\| \leq C(u)\Delta t,$$

$$\|\bar{\partial}u^j - u_t^j\| = \left\|\Delta t^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})u_{tt}(s)ds\right\| \leq C(u)\Delta t.$$

即 $E_j \leq C(u)(h^2 + \Delta t)^2$. 代入(2.20), 得

$$\|\theta^n\| \leq C(u)(h^2 + \Delta t),$$

证毕.

□

关于有限体积元算法 H^1 -模的估计, 我们给出并证明以下定理.

定理2.3 令 U_h^n 、 u^n 分别表示(2.8)及(2.4)的解, 假设 u 充分光滑, 则有

$$\|U_h^n - u^n\|_1 \leq C(\Delta t + h).$$

证: 在(2.17)中取 $\chi = \bar{\partial}\theta^n$, 有

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}\theta^n, \bar{\partial}\theta^n) + a(U_h^n; \theta^n, \bar{\partial}\theta^n) &= (f(U_h^n) - f(u^n), \bar{\partial}\theta^n) + \delta \\ &\quad - (\bar{\partial}\rho^n, \bar{\partial}\theta^n) - (\bar{\partial}u^n - u_t^n, \bar{\partial}\theta^n) \\ &\quad - [a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n)]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

对于双线性形式 $a(\cdot; \cdot, \cdot)$, 经简单计算可得

$$2\Delta t a(U_h^n; \theta^n, \bar{\partial}\theta^n) = a(U_h^n; \theta^n, \theta^n) - a(U_h^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + \Delta t^2 a(U_h^n; \bar{\partial}\theta^n, \bar{\partial}\theta^n).$$

结合(2.21), 得

$$\begin{aligned} &2\Delta t \|\bar{\partial}\theta^n\|^2 + a(U_h^n; \theta^n, \theta^n) - a(U_h^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + \alpha \Delta t^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right\|^2 \\ &= 2\Delta t \left\{ (f(U_h^n) - f(u^n), \bar{\partial}\theta^n) + \delta - (\bar{\partial}\rho^n, \bar{\partial}\theta^n) - (\bar{\partial}u^n - u_t^n, \bar{\partial}\theta^n) \right. \\ &\quad \left. - [a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

此处

$$\begin{aligned} a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) &= \left(\left[A(U_h^n) - A(u^n) \right] \frac{\partial w_h^n}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right) \\ &= \left(\left[A(U_h^n) - A(w_h^n) \right] \frac{\partial w_h^n}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right) \\ &\quad + \left(\left[A(w_h^n) - A(u^n) \right] \frac{\partial w_h^n}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[A(U_h^n) - A(w_h^n) \right] \frac{\partial w_h^n}{\partial x}, \bar{\partial}\theta^n \right) \\ &\quad + \left(\left[A(w_h^n) - A(u^n) \right] \frac{\partial w_h^n}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

参照条件(2.2)以及引理2.6, 有如下不等式

$$\left| \left(\left[A(w_h^n) - A(u^n) \right] \frac{\partial w_h^n}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right) \right| \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right\|. \quad (2.24)$$

对于(2.23)式右端的第一项, 借助于(2.2)以及引理2.6, 有

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[A(U_h^n) - A(w_h^n) \right] \frac{\partial w_h^n}{\partial x}, \bar{\partial}\theta^n \right) \right| \\ &\leq C \left[\left\| \left(A'(U_h^n) - A'(w_h^n) \right) \frac{\partial w_h^n}{\partial x} \right\| + \left\| A'(U_h^n) \frac{\partial}{\partial x} (U_h^n - w_h^n) \right\| \right] \|\bar{\partial}\theta^n\| \\ &\leq C \left(\|U_h^n - w_h^n\| + \left\| \frac{\partial}{\partial x} (U_h^n - w_h^n) \right\| \right) \|\bar{\partial}\theta^n\|. \end{aligned} \quad (2.25)$$

将(2.24)、(2.25)代入(2.23)中, 并利用Poincaré不等式, 得

$$|a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n)| \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial x} (U_h^n - w_h^n) \right\| \|\bar{\partial}\theta^n\| + Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right\|.$$

事实上 $U_h^n - w_h^n = \theta^n$, 从而

$$|a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n)| \leq C \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\| \|\bar{\partial}\theta^n\| + Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right\|.$$

现在来估计(2.22)的右端

$$\begin{aligned} & 2\Delta t \left\{ (f(U_h^n) - f(u^n), \bar{\partial}\theta^n) + \delta - (\bar{\partial}\rho^n, \bar{\partial}\theta^n) \right. \\ & \quad \left. - (\bar{\partial}u^n - u_t^n, \bar{\partial}\theta^n) - [a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n)] \right\} \\ & \leq 2\Delta t \left\{ C \|U_h^n - u^n\| \|\bar{\partial}\theta^n\| + C \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\| \|\bar{\partial}\theta^n\| \right. \\ & \quad \left. + Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right\| + (\|\bar{\partial}\rho^n\| + \|\bar{\partial}u^n - u_t^n\|) \|\bar{\partial}\theta^n\| + |\delta| \right\}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

此处

$$|\delta| \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right\|.$$

将(2.26)带入(2.22)中,

$$\begin{aligned} & 2\Delta t \|\bar{\partial}\theta^n\|^2 + a(U_h^n; \theta^n, \theta^n) - a(U_h^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + \alpha \Delta t^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right\|^2 \\ & \leq 2\Delta t \left\{ C \|U_h^n - u^n\| \|\bar{\partial}\theta^n\| + C \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\| \|\bar{\partial}\theta^n\| + Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right\| \right. \\ & \quad \left. + (\|\bar{\partial}\rho^n\| + \|\bar{\partial}u^n - u_t^n\|) \|\bar{\partial}\theta^n\| \right\}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

仿照定理2.2的做法, 利用 ε -Cauchy不等式并恰当选取 ε , 使得

$$a(U_h^n; \theta^n, \theta^n) - a(U_h^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) \leq C \Delta t \left(\left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 + E_n \right), \quad (2.28)$$

其中

$$E_n = \|U_h^n - u^n\|^2 + \|\bar{\partial}\rho^n\|^2 + \|\bar{\partial}u^n - u_t^n\|^2 + h^4/\Delta t.$$

将(2.28)中的 $a(U_h^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1})$ 项移至不等号右边, 参考条件(2.2), 有

$$\begin{aligned} & \alpha \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 \leq a(U_h^n; \theta^n, \theta^n) \leq a(U_h^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + C \Delta t \left(\left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 + E_n \right). \\ & (1 - C \Delta t) \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 \leq C a(U_h^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + C \Delta t E_n \leq C \left\| \frac{\partial\theta^{n-1}}{\partial x} \right\|^2 + C \Delta t E_n. \end{aligned}$$

或写成

$$\left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 \leq (1 + C \Delta t) \left\| \frac{\partial\theta^{n-1}}{\partial x} \right\|^2 + C \Delta t E_n.$$

重复上述过程并注意 $\theta^0 = 0$, 有

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 & \leq (1 + C \Delta t)^n \left\| \frac{\partial\theta^0}{\partial x} \right\|^2 + C \Delta t \sum_{j=1}^n (1 + C \Delta t)^{n-j} E_j \\ & = C \Delta t \sum_{j=1}^n (1 + C \Delta t)^{n-j} E_j. \end{aligned} \quad (2.29)$$

参考定理2.2, 知 $E_j \leq C(u)(h^4/\Delta t + h^2 + \Delta t^2)$. 从而

$$\left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right\| \leq C(\Delta t + h + \frac{h^2}{\Delta t^{1/2}}).$$

由于我们取网格比 $\frac{h^2}{\Delta t}$ 是一个常数,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \theta^n \right\| \leq C(\Delta t + h).$$

结合引理2.6并根据三角不等式, 得

$$\|U_h^n - u^n\|_1 \leq C(\Delta t + h).$$

□

接下来我们分析两重网格算法的解与真解之间的误差.

引理2.7 设 U_h^n 、 U_H^n 分别是两重网格格式和相应的粗网格上的解, 假设 u 充分光滑, 则有

$$\|U_h^n - U_H^n\| \leq C(\Delta t + H^2).$$

证: 如前, 令

$$U_h^n - u^n = U_h^n - w_h^n + w_h^n - u^n \triangleq \theta^n + \rho^n.$$

对于两重网格有限体积元算法, 有误差方程

$$\begin{aligned} (\bar{\partial} \theta^n, \chi) + a(U_H^n; \theta^n, \chi) &= (\bar{\partial} U_h^n, \chi) + a(U_H^n; U_h^n, \chi) - (\bar{\partial} w_h^n, \chi) - a(U_H^n; w_h^n, \chi) \\ &= (f(U_H^n) + f'(U_H^n)(U_h^n - U_H^n), \chi) + \delta - (u_t^n, \chi) - (\bar{\partial} w_h^n - u_t^n, \chi) \\ &\quad - a(u^n; w_h^n, \chi) - [a(U_H^n; w_h^n, \chi) - a(u^n; w_h^n, \chi)], \end{aligned} \quad (2.30)$$

where $\delta = \varepsilon(f(U_H^n) + f'(U_H^n)(U_h^n - U_H^n), \chi) - \varepsilon(\bar{\partial} U_h^n, \chi) - \varepsilon_a(U_H^n; U_h^n, \chi)$.

参考 R_h 的定义式(2.9), 我们发现

$$\begin{aligned} (\bar{\partial} \theta^n, \chi) + a(U_H^n; \theta^n, \chi) &= (f(U_H^n) + f'(U_H^n)(U_h^n - U_H^n) - f(u^n), \chi) + \delta - (\bar{\partial} \rho^n, \chi) \\ &\quad - (\bar{\partial} u^n - u_t^n, \chi) - [a(U_H^n; w_h^n, \chi) - a(u^n; w_h^n, \chi)]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

在(2.31)式中取 $\chi = \theta^n$, 并对 f 在 U_H^n 处做Taylor展开式, 有

$$f(u^n) = f(U_H^n) + f'(U_H^n)(u^n - U_H^n) + \frac{1}{2} f''(\tilde{u}^n)(u^n - U_H^n)^2,$$

其中 \tilde{u}^n 位于 u^n 、 U_H^n 之间. 从而

$$f(U_H^n) + f'(U_H^n)(U_h^n - U_H^n) - f(u^n) = f'(U_H^n)(U_h^n - u^n) - \frac{1}{2} f''(\tilde{u}^n)(u^n - U_H^n)^2.$$

其中的

$$\begin{aligned} \|(u^n - U_H^n)^2\|^2 &\leq \|u^n - U_H^n\|_{0,\infty}^2 \|u^n - U_H^n\|^2 \\ &\leq (\|u^n - R_H u^n\|_{0,\infty} + \|R_H u^n - U_H^n\|_{0,\infty})^2 \|u^n - U_H^n\|^2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

此处的 R_H 如同(2.9)中定义的 R_h . 借助于定理2.2、引理2.6 以及逆不等式(2.3), 可得

$$\begin{aligned} \|(u^n - U_H^n)^2\|^2 &\leq C \left[H|\ln H| + H^{-1}(\Delta t + H^2) \right]^2 (\Delta t + H^2)^2 \\ &\leq C \left[H|\ln H|\Delta t + H^3|\ln H| + H^{-1}(\Delta t)^2 + 2H\Delta t + H^3 \right]^2. \end{aligned}$$

选取适当的 H 、 Δt 使其满足 $H^{-1}\Delta t < \tilde{C}$, 于是

$$\|(u^n - U_H^n)^2\|^2 \leq C(\Delta t + H^3|\ln H|)^2.$$

对于式(2.31)的最后一项,

$$\begin{aligned} a(U_H^n; w_h^n, \theta^n) - a(u^n; w_h^n, \theta^n) &= a(U_H^n; w_h^n, \theta^n) - a(U_h^n; w_h^n, \theta^n) + \\ & a(U_h^n; w_h^n, \theta^n) - a(u^n; w_h^n, \theta^n). \end{aligned} \quad (2.33)$$

对于式(2.33)右端的第一项, 有如下不等式

$$\begin{aligned} a(U_H^n; w_h^n, \theta^n) - a(U_h^n; w_h^n, \theta^n) &= \left([A(U_H^n) - A(U_h^n)] \frac{\partial w_h^n}{\partial x}, \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right) \\ &\leq C \|U_H^n - U_h^n\| \left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right\| \\ &\leq C (\|U_H^n - u^n\| + \|u^n - U_h^n\|) \left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right\|. \end{aligned} \quad (2.34)$$

由定理2.2知

$$\|U_H^n - u^n\| \leq C(\Delta t + H^2).$$

从而利用条件(2.2)以及 $\frac{\partial w_h^n}{\partial x}$ 的有界性, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\delta} \|\theta^n\|^2 + \mu \left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right\|^2 &\leq C_1 (\|U_h^n - u^n\|) (\|\theta^n\| + \left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right\|) + C_2 (\Delta t + H^2) \left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right\| \\ &+ C_3 (\Delta t + H^3|\ln H|)^2 \|\theta^n\| + C_4 (\|\bar{\delta} \rho^n\| \\ &+ \|\bar{\delta} u^n - u_t^n\|) \|\theta^n\| + |\delta|. \end{aligned} \quad (2.35)$$

由引理2.3、2.4, 可得

$$|\delta| \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right\|.$$

仿照定理2.2的做法, 利用 ε -Cauchy不等式并恰当选取 ε , 使得

$$\bar{\delta} \|\theta^n\|^2 + \mu \left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right\|^2 \leq C(\|\theta^n\|^2 + E_n), \quad (2.36)$$

此处

$$E_n = \|\rho^n\|^2 + \|\bar{\delta} \rho^n\|^2 + \|\bar{\delta} u^n - u_t^n\|^2 + h^4 + (\Delta t + H^2 + H^6|\ln H|^2)^2.$$

这说明

$$(1 - C\Delta t) \|\theta^n\|^2 \leq \|\theta^{n-1}\|^2 + C\Delta t E_n.$$

或者

$$\|\theta^n\|^2 \leq (1 + C\Delta t) \|\theta^{n-1}\|^2 + C\Delta t E_n.$$

重复上述过程并注意到 $\theta^0 = 0$, 有

$$\begin{aligned}\|\theta^n\|^2 &\leq (1 + C\Delta t)^n \|\theta^0\|^2 + C\Delta t \sum_{j=1}^n (1 + C\Delta t)^{n-j} E_j \\ &= C\Delta t \sum_{j=1}^n (1 + C\Delta t)^{n-j} E_j.\end{aligned}\tag{2.37}$$

利用引理2.6, 可得 $\|\rho^j\| \leq C(u)h^2$,

$$\|\bar{\partial}\rho^j\| = \left\| \Delta t^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \rho_t ds \right\| \leq C(u)\Delta t,$$

$$\|\bar{\partial}u^j - u_t^j\| = \left\| \Delta t^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})u_{tt}(s) ds \right\| \leq C(u)\Delta t.$$

这表明 $E_j \leq C(u)(h^2 + H^2 + \Delta t)^2$. 从而

$$\|\theta^n\| \leq C(u)(h^2 + H^2 + H^3|\ln H| + \Delta t) \leq C(u)(h^2 + H^2 + \Delta t).$$

结合引理2.6、定理2.2并利用三角不等式, 得

$$\|U_h^n - U_H^n\| = \|\theta^n\| + \|\rho^n\| + \|u^n - U_H^n\| \leq C(\Delta t + h^2 + H^2) \leq C(\Delta t + H^2).$$

□

接下来我们给出并证明两重网格算法的解与真解之间的误差的 H^1 -模估计.

定理2.4 设 U_h^n 、 u^n 分别是两重网格算法和问题(2.1)的解, 假设 u 充分光滑, 则有

$$\|U_h^n - u^n\|_1 \leq C(\Delta t + h + H^2).$$

证: 在式(2.31)中取 $\chi = \bar{\partial}\theta^n$, 可以得到如下等式

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}\theta^n, \bar{\partial}\theta^n) + a(U_H^n; \theta^n, \bar{\partial}\theta^n) &= (f(U_H^n) + f'(U_H^n)(U_h^n - U_H^n) - f(u^n), \bar{\partial}\theta^n) + \delta \\ &\quad - (\bar{\partial}\rho^n, \bar{\partial}\theta^n) - (\bar{\partial}u^n - u_t^n, \bar{\partial}\theta^n) \\ &\quad - [a(U_H^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n)].\end{aligned}\tag{2.38}$$

对双线性形式 $a(\cdot; \cdot, \cdot)$, 经简单计算可得

$$2\Delta t a(U_H^n; \theta^n, \bar{\partial}\theta^n) = a(U_H^n; \theta^n, \theta^n) - a(U_H^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + \Delta t^2 a(U_H^n; \bar{\partial}\theta^n, \bar{\partial}\theta^n).\tag{2.39}$$

将(2.39)代入(2.38),

$$\begin{aligned}&2\Delta t \|\bar{\partial}\theta^n\|^2 + a(U_H^n; \theta^n, \theta^n) - a(U_H^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + \alpha \Delta t^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\partial}\theta^n) \right\|^2 \\ &= 2\Delta t \left\{ (f(U_H^n) + f'(U_H^n)(U_h^n - U_H^n) - f(u^n), \bar{\partial}\theta^n) + \delta - (\bar{\partial}\rho^n, \bar{\partial}\theta^n) \right. \\ &\quad \left. - (\bar{\partial}u^n - u_t^n, \bar{\partial}\theta^n) - [a(U_H^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n)] \right\},\end{aligned}\tag{2.40}$$

此处

$$\begin{aligned} a(U_H^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) &= a(U_H^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) \\ &\quad + a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n). \end{aligned}$$

如同定理2.3中所证

$$\left| a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) \right| \leq C \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\| \|\bar{\partial}\theta^n\| + Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\partial}\theta^n) \right\|.$$

注意式(2.34)并利用引理2.7, 可得

$$\left| a(U_H^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(U_h^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) \right| \leq C(\Delta t + H^2) \left\| \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\partial}\theta^n) \right\|.$$

综上所述我们得到(2.40)右端项的估计

$$\begin{aligned} &2\Delta t \left\{ (f(U_H^n) + f'(U_H^n)(U_h^n - U_H^n) - f(u^n), \bar{\partial}\theta^n) + \delta - (\bar{\partial}\rho^n, \bar{\partial}\theta^n) \right. \\ &\quad \left. - (\bar{\partial}u^n - u_t^n, \bar{\partial}\theta^n) - [a(U_H^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n) - a(u^n; w_h^n, \bar{\partial}\theta^n)] \right\} \\ &\leq 2\Delta t \left\{ C \|U_h^n - u^n\| \|\bar{\partial}\theta^n\| + C(\Delta t + H^3 |\ln H|)^2 \|\bar{\partial}\theta^n\| + C \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\| \|\bar{\partial}\theta^n\| \right. \\ &\quad \left. + Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\partial}\theta^n) \right\| + C(\Delta t + H^2) \left\| \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\partial}\theta^n) \right\| \right. \\ &\quad \left. + (\|\bar{\partial}\rho^n\| + \|\bar{\partial}u^n - u_t^n\|) \|\bar{\partial}\theta^n\| + |\delta| \right\}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

此处

$$|\delta| \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\partial}\theta^n) \right\|.$$

将(2.41)代入到(2.40), 并按照前面定理的方法, 利用 ε -Cauchy不等式并恰当选取 ε , 使得

$$a(U_H^n; \theta^n, \theta^n) - a(U_H^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) \leq C\Delta t \left(\left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 + E_n \right),$$

其中

$$E_n = \|U_h^n - u^n\|^2 + \|\bar{\partial}\rho^n\|^2 + \|\bar{\partial}u^n - u_t^n\|^2 + h^2 + (\Delta t + H^2)^2.$$

将 $a(U_H^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1})$ 项移至右端, 参考条件(2.2), 有

$$\begin{aligned} \alpha \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 &\leq a(U_H^n; \theta^n, \theta^n) \leq a(U_H^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + C\Delta t \left(\left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 + E_n \right). \\ (1 - C\Delta t) \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 &\leq Ca(U_H^n; \theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + C\Delta t E_n \leq C \left\| \frac{\partial\theta^{n-1}}{\partial x} \right\|^2 + C\Delta t E_n. \end{aligned}$$

即

$$\left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 \leq (1 + C\Delta t) \left\| \frac{\partial\theta^{n-1}}{\partial x} \right\|^2 + C\Delta t E_n.$$

重复上述过程并注意到 $\theta^0 = 0$, 可以得到

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial\theta^n}{\partial x} \right\|^2 &\leq (1 + C\Delta t)^n \left\| \frac{\partial\theta^0}{\partial x} \right\|^2 + C\Delta t \sum_{j=1}^n (1 + C\Delta t)^{n-j} E_j \\ &= C\Delta t \sum_{j=1}^n (1 + C\Delta t)^{n-j} E_j. \end{aligned} \quad (2.42)$$

如前所证 $E_j \leq C(u)(h^2 + \Delta t^2 + H^4)$, 从而

$$\left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right\| \leq C(\Delta t + h + H^2).$$

结合引理2.6并利用三角不等式, 得

$$\|U_h^n - u^n\|_1 \leq C(\Delta t + h + H^2).$$

□

2.4 数值算例

在这一节我们给出几个数值算例来验证前面所述的误差分析. 在所有的例子中, 定义域都设为 $\Omega \times [0, T] = [0, 1] \times [0, 1]$. 全离散向后Euler有限体积元格式的矩阵形式为:

$$(D + \Delta t M(S^n))S^n = DS^{n-1} + \Delta t Q^n, \quad (2.43)$$

其中 D 为质量矩阵, 其元素 $D_{ij} = \int_{I_i^*} \varphi_j(x) dx$, $S^n = (U_1^n, U_2^n, \dots, U_N^n)^T$, $U_i^n = U_h^n(x_i)$, Q 是以 $Q_i = \int_{I_i^*} f dx$ 为分量的向量, $M(S)$ 是整体刚度矩阵, 其元素为

$$M_{ij}(S) = -a(S) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} \Big|_{I_i^*}.$$

由于矩阵系统(2.43)是非线性的, 我们将采取迭代方法去求解.

在[37]中, V. Thomée提出了一种求解由抛物方程(2.1)所形成的矩阵系统的方法, 我们简记为**M1**. 叙述如下: 令 $\xi^0 = U^{n-1}$, $m = 1, 2, \dots$, 求解代数系统

$$(D + \Delta t M(\xi^{m-1}))\xi^m = DS^{n-1} + \Delta t Q^n, \quad (2.44)$$

其中 $n = 1, 2, \dots, J$.

在[23]中, P. Chatzipantelidis简化了上述方法M1, 描述如下:

$$\left\langle \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}, \chi \right\rangle + a(u_h^{n-1}; u_h^n, \Pi_h \chi) = (f(u_h^{n-1}, x, t^n), \Pi_h \chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_h, \text{ for } t \geq 0. \quad (2.45)$$

作者在[23]中将(2.45)称为线性化的向后Euler格式, 我们简记为**LBE**. (2.45)改写成矩阵形式为

$$(D + \Delta t M(S^{n-1}))S^n = DS^{n-1} + \Delta t Q^n,$$

此处 $n = 1, 2, \dots, J$.

我们引入在求解非线性方程组中广泛使用的拟Newton法, 它是由Broyden在[7]最先提出的. 一阶逆Broyden拟Newton法(简记为**QN**)描述如下:

$$\begin{cases} \xi^{k+1} = \xi^k - B_k F(\xi^k), \\ P^k = \xi^{k+1} - \xi^k, \\ E^k = F(\xi^{k+1}) - F(\xi^k), \\ B_{k+1} = B_k - ((B_k E^k - P^k)(P^k)^T B_k) / ((P^k)^T B_k E^k), \end{cases} \quad (2.46)$$

其中 $F(\xi) = (D + \Delta t M(\xi))\xi - DS^{n-1} - \Delta t Q^n$. 我们用LBE 来得到 ξ^0 .

拟Newton方法最主要的优势在于不要求Jacobi矩阵的逆, 因而可用来求解具有病态Jacobi矩阵的非线性方程组.

在下面的例子中, 我们采用 $\|\xi^{m+1} - \xi^m\|_\infty \leq \varepsilon$ 作为迭代的终止条件, 其中 ε 是事先给定的常数. 我们取真解 $u(x, t) = xe^{-x+t}$, 系数 A 分别为 $A(u) = 1 + u$ 、 $A(u) = 1 + u^2$ 以及 $A(u) = 1/(1 + u^2)$ 为例(取 f 满足相应的抛物方程(2.1)). 由于我们设网格比 $\frac{h^2}{\Delta t}$ 是一个常数, 从而取 $\Delta t = h^2$ 来对时间项 $[0, T]$ ($T = 1$) 做剖分. 计算的结果显示在表1到表9中, 其中 ‘NI’ 表示迭代的次数. 在表中我们给出计算机的工作时间和误差的收敛阶, 以便于发现不同算法的特点及优势.

表2.1: 当 $A(u) = 1 + u$ 时, 采用方法M1所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _0$	收敛阶	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/10	0.0018	-	0.1487	-	839	0.1248
1/20	4.4804e-04	2.0063	0.0747	0.9932	2874	0.2964
1/40	1.1149e-04	2.0067	0.0374	0.9981	9467	1.7160
1/80	2.7803e-05	2.0036	0.0187	1	32000	36.1298
1/160	6.9415e-06	2.0019	0.0094	0.9923	103905	369.4104

表2.2: 当 $A(u) = 1 + u$ 时, 采用方法LBE所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _0$	收敛阶	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/10	0.0031	-	0.1507	-	100	0.0780
1/20	7.7142e-04	2.0067	0.0752	1.0029	400	0.1560
1/40	1.9127e-04	2.0119	0.0375	1.0038	1600	0.7020
1/80	4.7618e-05	2.0060	0.0188	0.9962	6400	12.8389
1/160	1.1880e-05	2.0030	0.0094	1	25600	151.8202

表2.3: 当 $A(u) = 1 + u$ 时, 采用方法QN所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _0$	收敛阶	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/10	0.0018	-	0.1487	-	2638	0.5928
1/20	4.4804e-04	2.0063	0.0747	0.9932	26032	1.9500
1/40	1.1149e-04	2.0067	0.0374	0.9981	126580	30.6386
1/80	2.7803e-05	2.0036	0.0187	1	545525	429.6580
1/160	6.9422e-06	2.0018	0.0094	0.9923	1658831	3.8905e+03

表2.4: 当 $A(u) = 1 + u^2$ 时, 采用方法M1所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _0$	收敛阶	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/10	0.0014	-	0.1479	-	788	0.1560
1/20	3.4597e-04	2.0167	0.0745	0.9893	2564	0.3588
1/40	8.5756e-05	2.0123	0.0374	0.9942	8388	1.7784
1/80	2.1358e-05	2.0055	0.0187	1	26979	33.3062
1/160	5.3302e-06	2.0025	0.0094	0.9923	94919	387.9589

表2.5: 当 $A(u) = 1 + u^2$ 时, 采用方法LBE所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _0$	收敛阶	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/10	0.0029	-	0.1499	-	100	0.1092
1/20	7.1006e-04	2.0300	0.0750	0.9990	400	0.2028
1/40	1.7555e-04	2.0161	0.0375	1	1600	0.9516
1/80	4.3647e-05	2.0079	0.0187	1.0039	6400	15.5533
1/160	1.0882e-05	2.0039	0.0094	0.9923	25600	178.4339

表2.6: 当 $A(u) = 1 + u^2$ 时, 采用方法QN所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _0$	收敛阶	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/10	0.0014	-	0.1479	-	2846	0.3744
1/20	3.4597e-04	2.0167	0.0745	0.9893	22889	1.9344
1/40	8.5756e-05	2.0123	0.0374	0.9942	107831	30.2330
1/80	2.1358e-05	2.0079	0.0187	1	451720	368.0844
1/160	5.3306e-06	2.0024	0.0094	0.9923	1289668	3.1380e+03

表2.7: 当 $A(u) = 1/(1 + u^2)$ 时, 采用方法M1所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _0$	收敛阶	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/10	0.0017	-	0.1436	-	754	0.2808
1/20	4.0205e-04	2.0801	0.0734	0.9682	2499	0.4368
1/40	9.8021e-05	2.0362	0.0371	0.9844	8287	2.0124
1/80	2.4256e-05	2.0147	0.0186	0.9961	26856	35.0534
1/160	6.0366e-06	2.0065	0.0093	1.0000	94501	352.1099

表2.8: 当 $A(u) = 1/(1 + u^2)$ 时, 采用方法LBE所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _0$	收敛阶	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/10	0.0031	-	0.1420	-	100	0.1766
1/20	7.4206e-04	2.0627	0.0730	0.9599	400	0.2652
1/40	1.8206e-04	2.0271	0.0370	0.9804	1600	0.4680
1/80	4.5128e-05	2.0123	0.0186	0.9922	6400	6.5676
1/160	1.1236e-05	2.0059	0.0093	1.0000	25600	107.0479

表2.9: 当 $A(u) = 1/(1 + u^2)$ 时, 采用方法QN所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _0$	收敛阶	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/10	0.0017	-	0.1436	-	3120	0.4212
1/20	4.0205e-04	2.0801	0.0734	0.9682	21717	2.0436
1/40	9.8021e-05	2.0362	0.0371	0.9844	93413	28.4546
1/80	2.4256e-05	2.0147	0.0186	0.9961	331580	290.5051
1/160	6.0369e-06	2.0065	0.0093	1.0000	604201	1.6630e+03

从表2.1到表2.9中, 我们可以清楚地看到误差的 L^2 -模的收敛阶为2, 误差的 H^1 -模的收敛阶为1. 这与前面所做的理论推导的结果(定理2.2、2.3)相同. 因此可以说对于非线性抛物方程, 有限体积元格式的解收敛到真解, 格式是有效的, 误差是可以容忍的. 通过对M1、LBE、QN 三种方法的对比, 可以发现M1方法在花费2倍于LBE方法工作量的条件下, 得到结果更加接近于真解(误差约为LBE的 $\frac{1}{2}$), 从而多次进行迭代过程(2.44)是有效的. 而相对于QN方法, 在达到相同的误差精度下, 显然M1所用的工作时间更少, 因而更加适合求解此类非线性系统. 所以在以下的两重网格算法中, 在粗网格上求解非线性方程时, 会采用M1方法.

以下的表10到表15是M1方法与两重网格算法的对比. 取 $H = 1/N$, ($N = 4, 8, 16, 32, 64$). $h = H^2$ 和 $\Delta t = h$.

表2.10: 当 $A(u) = 1 + u$ 时, 采用方法M1所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/16	0.0933	-	1923	0.2184
1/32	0.0467	0.9985	6513	0.8892
1/64	0.0234	0.9969	21318	13.4941
1/128	0.0117	1	71972	169.3547
1/256	0.0059	0.9877	262144	2.8768e+03

表2.11: 当 $A(u) = 1 + u$ 时, 采用两重网格有限体积元算法所得到的结果.

H	h	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/4	1/16	0.1112	-	157	0.1716
1/8	1/64	0.0282	1.9794	558	0.3744
1/16	1/256	0.0071	1.9898	1924	1.2168
1/32	1/1024	0.0018	1.9798	6513	39.1095
1/64	1/4096	4.4364e-04	2.0205	21318	2.8204e+03

表2.12: 当 $A(u) = 1 + u^2$ 时, 采用方法M1所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/16	0.0929	-	1758	0.2496
1/32	0.0467	0.9923	5629	0.9672
1/64	0.0234	0.9969	18289	15.6489
1/128	0.0117	1	65110	179.3075
1/256	0.0059	0.9877	206147	2.5561e+03

 表2.13: 当 $A(u) = 1 + u^2$ 时, 采用两重网格有限体积元算法所得到的结果.

H	h	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/4	1/16	0.1072	-	152	0.3120
1/8	1/64	0.0271	1.9839	532	0.3588
1/16	1/256	0.0068	1.9947	1758	1.0920
1/32	1/1024	0.0017	2	5629	41.9955
1/64	1/4096	4.2511e-04	1.9996	18290	2.7198e+03

 表2.14: 当 $A(u) = 1/(1 + u^2)$ 时, 采用方法M1所得到的结果.

h	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/16	0.0913	-	1717	0.2652
1/32	0.0463	0.9796	5562	0.9360
1/64	0.0233	0.9907	18288	13.9777
1/128	0.0117	0.9938	64934	175.1891
1/256	0.0058	1.0124	203404	2.4025e+03

 表2.15: 当 $A(u) = 1/(1 + u^2)$ 时, 采用两重网格有限体积元算法所得到的结果.

H	h	$\ \cdot\ _1$	收敛阶	NI	工作时间(s)
1/4	1/16	0.0964	-	144	0.1404
1/8	1/64	0.0249	1.9529	508	0.2496
1/16	1/256	0.0063	1.9827	1717	1.0140
1/32	1/1024	0.0016	1.9773	5562	45.8955
1/64	1/4096	3.9224e-04	2.0283	18228	2.7308e+03

从表2.10到表2.15中, 可以清楚地发现两重网格有限体积元算法 H^1 -模的收敛阶是2, 这和我们的理论推导(定理2.4)一致. 相对于有限体积元算法 H^1 -模的1阶收敛性, 提高了 H^1 -模的收敛阶是两重网格算法的优势. 对照M1方法及两重网格算法所用的时间, 在达到大致相同精度的条件下, 两重网格算法所用的时间远远小于M1所用的时间. 从而在求解非线性抛物方程中采用两重网格算法是一个更好的选择. 在实际的计算中, 往往只要求空间网格满足 $h < H$, 而不是 $h = O(H^2)$.

第3章 抛物方程有限体积元算法的后验误差估计

在这一章, 我们考虑下列抛物方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (a(x, t) \nabla u) = f(x, t), & \Omega \times (0, T], \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0, & \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

定义在连通的空间-时间圆柱体中, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 且具有 Lipschitz 型边界 $\partial\Omega$. 其中 $x = (x_1, x_2)$, 系数 $a(x, t) = (a_{ij}(x, t))_{i,j=1}^2$ 是在 Ω 上是一个对称正定的实矩阵. 设时间项的终点 T 为一个固定的常数, 右端项 f 可测且在 $\Omega \times [0, T]$ 上平方可积. 初始项 u_0 同样设为可测且在 Ω 上平方可积.

在这一章中我们将构造后验误差估计子, 并研究其与真实误差之间的关系.

3.1 有限体积元格式的构建及所用的引理

对于抛物方程(3.1), 该方程的弱形式如下定义: 寻找 $u \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U} = L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$), 满足

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.2)$$

其中 (\cdot, \cdot) 表示 $L^2(\Omega)$ -内积, 双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 定义如下:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

定义 $\|\cdot\| = a(\cdot, \cdot)$. 根据[30], $\|\cdot\|$ 等价于 $\|\cdot\|_1$.

令 \mathcal{T}_h 表示 Ω 的初始剖分, h_K ($K \in \mathcal{T}_h$) 表示 K 的直径, $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$. 假设剖分 \mathcal{T}_h 是正则的[33], 这意味着 \mathcal{T}_h 中的任意两个相邻的单元有大致相同的尺寸.

定义 \mathcal{T}_h 上的试探函数空间 \mathcal{U}_h 为线性有限元空间, 即

$$\mathcal{U}_h = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}) : u|_K \text{ 为线性函数且 } u|_{\partial\Omega} = 0, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

为了描述求解抛物方程(3.1)的有限体积元方法, 我们构造初始剖分 \mathcal{T}_h 的对偶剖分 \mathcal{T}_h^* , 对偶剖分的单元通常被称为控制体积. 我们采用[30, 21, 26, 2]中的方法来构造控制体积. 设 z_K 为三角形 K 的重心, 用直线连接 z_K 与 K 的边的中点, 从而将 K 剖分成三部分 K_z , $z \in Z_h(K)$, 其中 $Z_h(K)$ 是 K 的顶点. 对每个顶点 $z \in Z_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} Z_h(K)$, 得到控制体积 V_z , 它是由包含 z 的三角形的子区域构成的单元(见图3.1). 可以最终得到覆盖定义域 Ω 的一组控制体积, 即初始剖分 \mathcal{T}_h 的对偶剖分 \mathcal{T}_h^* . 用 Z_h^0 表示 Z_h 中位于 Ω 内的顶点, 用 \mathcal{E}_h 表示 \mathcal{T}_h 的内边集.

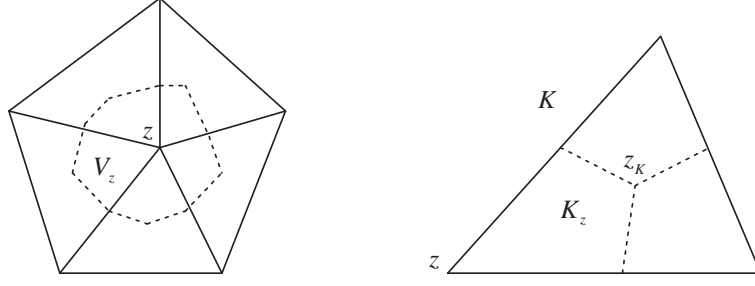


图3.1 左图: 虚线为控制体积 V_z 的边 右图: 三角形 K 被剖分成三个子区域 K_z .

重心型对偶剖分适用于任意的三角剖分 \mathcal{T}_h [2]. 设对偶剖分 \mathcal{T}_h^* 是正则的, 即存在正常数 $C > 0$ 使得

$$C^{-1}h^2 \leq \text{meas}(V_z) \leq Ch^2, \quad \forall V_z \in \mathcal{T}_h^*.$$

定义检验函数空间 \mathcal{V}_h 如下

$$\mathcal{V}_h = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_{V_z} \text{ 是常数且 } v|_{\partial\Omega} = 0, \forall V_z \in \mathcal{T}_h^* \right\}.$$

对任意的 $u_h \in \mathcal{U}_h$, 定义插值算子 $\Pi_h : \mathcal{U}_h \rightarrow \mathcal{V}_h$,

$$\Pi_h u_h = \sum_{z \in Z_h^0} u_h(z) \Psi_z,$$

其中 Ψ_z 是控制体积 V_z 的特征函数.

根据[21, 34], 对于任意的 $u_h \in \mathcal{U}_h$, 存在与 h 无关的正常数 C , 使得 Π_h 满足不等式

$$\|u_h - \Pi_h u_h\|_{0,K} \leq Ch_K |u_h|_{1,K}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (3.3)$$

借助于插值算子 Π_h , (3.1)的全离散向后Euler有限体积元格式为: 确定 $U_h^n \in \mathcal{U}_h$ ($n = 1, \dots, N$) 使其满足

$$\begin{cases} \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \Pi_h \chi \right) + a(U_h^n, \Pi_h \chi) = (f^n, \Pi_h \chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{U}_h, \quad t \geq 0. \\ U_h^0 = u_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

其中

$$a(U_h^n, \Pi_h \chi) = - \sum_{z \in Z_h^0} \chi(z) \int_{\partial V_z} (a(x) \nabla U_h^n) \cdot \mathbf{n} ds,$$

此处 $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ 表示 ∂V_z 上的单位外法向量.

下面的引理在[30, 35]有证明, 它说明双线性形式 $a_h(\cdot, \Pi_h \cdot)$ 在 \mathcal{U}_h 是有界、强制的.

引理3.1 当 h 充分小, 存在正常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得, 对任意的 $u_h, v_h \in \mathcal{U}_h$, 强制性

$$a_h(u_h, \Pi_h u_h) \geq C_1 \|u_h\|_1^2$$

以及有界性

$$|a_h(u_h, \Pi_h v_h)| \leq C_2 \|u_h\|_1 \|v_h\|_1$$

成立.

根据[30], (3.2)的真解与其有限体积元解(3.4)之间的误差以 H^1 -范数衡量是一阶收敛的, 此时的收敛性是最优的.

引理3.2 令 U_h^n 、 u 分别表示(3.4)、(3.1)的解, 假设 u 充分光滑, 存在与 h 、 Δt 无关的正常数 C , 满足

$$\|u^n - U_h^n\|_1 \leq C(\Delta t + h).$$

3.2 后验误差估计的上界

在这一节, 我们给出(3.1)有限体积元方法的残量型后验误差估计子, 并且建立它与误差 $\|u - U_h\|_1$ 之间的关系. 先介绍向量值函数在通过边 $E \in \mathcal{E}_h$ 的跳跃, 其将在残量型后验误差估计中将要用到. 设 E 是一个内边且是三角形 K_+ 、 K_- 的边. 定义 E 上的单位法向量 \mathbf{n}_{K_+} 、 \mathbf{n}_{K_-} 分别指向 K_+ 、 K_- 的外部. 令 \mathbf{v} 表示向量值函数, 设它在单元 K_+ 和 K_- 内连续. 用 \mathbf{v}^+ 、 \mathbf{v}^- 分别表示 \mathbf{v} 从单元 K_+ 和 K_- 的内部取到的 E 上的迹. 从而向量值函数 \mathbf{v} 在边 $E \in \mathcal{E}_h$ 的跳跃定义为:

$$[\mathbf{v}]_E = \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}_{K_+} + \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}_{K_-}.$$

定义函数 R_K 、 R_E 、 η^n 如下:

$$R_K = f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} + \nabla \cdot (a(x) \nabla U_h^n), \quad R_E = -[a(x) \nabla U_h^n]_E,$$

$$\eta_R^n = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_J^n = \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta^n = \left((\eta_R^n)^2 + (\eta_J^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

此处 h_E 是 E 的长度.

首先, 介绍Scott-Zhang插值函数 $\mathcal{I}_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{U}_h$, 它满足下面的引理.

引理3.1 [18]对任意的 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, 存在与 h 无关的正常数 C , 对任意的 $K \in \mathcal{T}_h$ 、 $E \in \mathcal{E}_h$, 下式成立

$$\|\mathcal{I}_h \varphi\|_{1,\Omega} \leq C \|\varphi\|_{1,\Omega},$$

$$\|\varphi - \mathcal{I}_h \varphi\|_{0,K} \leq Ch_K \|\varphi\|_{1,\omega_K},$$

$$\|\varphi - \mathcal{I}_h \varphi\|_{0,E} \leq Ch_E^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{1,\omega_E},$$

其中 $\omega_K = \bigcup_{K' \cap K \neq \emptyset} K'$, $\omega_E = \bigcup_{K \cap E \neq \emptyset} K$.

在定理证明的过程中将用到下面的引理, 该引理通常被称为迹定理[33].

引理3.2 存在与 h_E 无关的正常数 C , 使得

$$\|\omega\|_{0,E}^2 \leq C(h_E^{-1} \|\omega\|_{0,K}^2 + h_E \|\nabla \omega\|_{0,K}^2), \quad \forall \omega \in H^1(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad E \in \partial K.$$

从而, 我们给出上界及其证明.

定理3.1 对任意的正整数 $1 \leq m \leq N$, 存在与 h 无关的正常数 C , 使得下面的后验误差估计成立

$$\begin{aligned} & \|u^m - U_h^m\|^2 + \sum_{n=1}^m \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u - U_h^n\|_1^2 dt \\ & \leq C \left(\sum_{n=1}^m \left((\eta^n)^2 + \|U_h^n - U_h^{n-1}\|_1^2 \right) \right) \cdot \Delta t + C \sum_{n=1}^m \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

证: 对任意的 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $v \in \mathcal{U}_h$, 结合(3.2)、(3.4)得

$$\begin{aligned} \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \varphi \right) + a(U_h^n, \varphi) &= - \left(f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \varphi - \Pi_h v \right) + \\ & a(U_h^n, \varphi) - a(U_h^n, \Pi_h v) + (f^n, \varphi). \end{aligned} \quad (3.6)$$

当 $t \in (t^{n-1}, t^n]$, 定义

$$U_h \triangleq U_h(t) = l(t)U_h^n + (1 - l(t))U_h^{n-1}, \quad l(t) = \frac{t - t^{n-1}}{\Delta t}.$$

(3.2)式减去(3.6)式, 当 $t \in (t^{n-1}, t^n]$ 时,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(u - U_h)}{\partial t}, \varphi \right) + a(u - U_h^n, \varphi) &= \left(f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \varphi - \Pi_h v \right) \\ & - [a(U_h^n, \varphi) - a(U_h^n, \Pi_h v)] + (f - f^n, \varphi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

在(3.7)式中, 取 $\varphi = u - U_h \in H_0^1(\Omega)$, $v = \mathcal{I}_h(u - U_h) \in \mathcal{U}_h$,

$$\begin{aligned} a(u - U_h^n, u - U_h) &= (a(x)\nabla(u - U_h^n), \nabla(u - U_h)) \\ &= \frac{1}{2} \|u - U_h^n\|^2 + \frac{1}{2} \|u - U_h\|^2 - \frac{1}{2} \|U_h - U_h^n\|^2. \end{aligned}$$

从而我们推得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - U_h\|^2 + \frac{1}{2} \|u - U_h^n\|^2 + \frac{1}{2} \|u - U_h\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|U_h - U_h^n\|^2 + \left(f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \varphi - v \right) + \left(f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, v - \Pi_h v \right) \\ & \quad - [a(U_h^n, \varphi) - a(U_h^n, v)] - [a(U_h^n, v) - a(U_h^n, \Pi_h v)] + (f - f^n, \varphi) \\ & \triangleq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned} \quad (3.8)$$

现在我们估计(3.8)式的右端项.

对于 I_1 , 有

$$\|U_h - U_h^n\|^2 = (1 - l(t))^2 \|U_h^n - U_h^{n-1}\|^2.$$

根据Green公式, 有

$$\begin{aligned}
 -I_4 &= (a(x)\nabla U_h^n, \nabla(\varphi - v)) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (a(x)\nabla U_h^n, \nabla(\varphi - v)) \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial K} (a(x)\nabla U_h^n) \cdot \mathbf{n}(\varphi - v) ds - \int_K \nabla \cdot (a(x)\nabla U_h^n)(\varphi - v) dx \right] \\
 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} ([a(x)\nabla U_h^n]_E, \varphi - v)_{0,E} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot (a(x)\nabla U_h^n), \varphi - v)_{0,K}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

将 I_2 与 I_4 一起估计, 有

$$\begin{aligned}
 I_2 + I_4 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} + \nabla \cdot (a(x)\nabla U_h^n), \varphi - v \right)_{0,K} \\
 &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} ([a(x)\nabla U_h^n]_E, \varphi - v)_{0,E} \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (R_K, \varphi - v)_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (R_E, \varphi - v)_{0,E}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

利用引理3.1和Cauchy-Schwarz不等式,

$$\begin{aligned}
 |I_2 + I_4| &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ h_K \|R_K\|_{0,K} \|u - U_h\|_{1,\omega_K} \right\} + C \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ h_E^{\frac{1}{2}} \|R_E\|_{0,E} \|u - U_h\|_{1,\omega_E} \right\} \\
 &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - U_h\|_{1,\omega_K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + C \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|u - U_h\|_{1,\omega_E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - U_h\|_{1,\Omega} + C \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - U_h\|_{1,\Omega}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

对于 I_5 项, 由于 $\Pi_h v$ 在 $K \cap V_z$, $z \in Z_h(K)$ 上为常数, 所以

$$\begin{aligned}
 \int_K a(x)\nabla U_h^n \cdot \nabla v dx &= \sum_{z \in Z_h(K)} \int_{K \cap V_z} a(x)\nabla U_h^n \cdot \nabla(v - \Pi_h v) dx \\
 &= - \sum_{z \in Z_h(K)} \int_{K \cap V_z} \nabla \cdot (a(x)\nabla U_h^n) \cdot (v - \Pi_h v) dx \\
 &\quad + \sum_{z \in Z_h(K)} \int_{\partial(K \cap V_z)} a(x)\nabla U_h^n \cdot \mathbf{n}(v - \Pi_h v) ds \\
 &= - \int_K \nabla \cdot (a(x)\nabla U_h^n) \cdot (v - \Pi_h v) dx \\
 &\quad + \int_{\partial K} a(x)\nabla U_h^n \cdot \mathbf{n}(v - \Pi_h v) ds \\
 &\quad + \sum_{z \in Z_h(K)} \int_{K \cap \partial V_z} a(x)\nabla U_h^n \cdot \mathbf{n}(v - \Pi_h v) ds
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

由于 $a(x)\nabla U_h^n$ 和 v 在每个单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 上连续, 有

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}_h(K)} \int_{K \cap \partial V_z} a(x)\nabla U_h^n \cdot \mathbf{n} v ds = 0.$$

从而

$$-I_5 = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left([a(x)\nabla U_h^n], v - \Pi_h v \right)_{0,E} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\nabla \cdot (a(x)\nabla U_h^n), v - \Pi_h v \right)_{0,K}. \quad (3.13)$$

将 I_3 和 I_5 一起估计, 有

$$\begin{aligned} I_3 + I_5 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} + \nabla \cdot (a(x)\nabla U_h^n), v - \Pi_h v \right)_{0,K} \\ &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left([a(x)\nabla U_h^n], v - \Pi_h v \right)_{0,E} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(R_K, v - \Pi_h v \right)_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left(R_E, v - \Pi_h v \right)_{0,E}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

对于(3.14)式右端的第一项, 借助于引理3.1以及Cauchy-Schwarz不等式, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(R_K, v - \Pi_h v \right)_{0,K} \right| &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ h_K \|R_K\|_{0,K} \|\mathcal{I}_h(u - U_h)\|_{1,K} \right\} \\ &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{I}_h(u - U_h)\|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{I}_h(u - U_h)\|_{1,\Omega}. \\ &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - U_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

对于(3.14)式右端的第二项, 利用Cauchy-Schwarz不等式, 如同[3]所作的估计, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left(R_E, v - \Pi_h v \right)_{0,E} \right| &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|R_E\|_{0,E} \|v - \Pi_h v\|_{0,E} \\ &\leq \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v - \Pi_h v\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

因为 $\Pi_h v$ 是分片常数, 借助于引理3.1和引理3.2, 有

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v - \Pi_h v\|_{0,E}^2 \leq C \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (h_E^{-2} \|v - \Pi_h v\|_{0,K}^2 + |v|_{1,K}^2) \leq C \|v\|_1^2 \leq C \|u - U_h\|_1^2. \quad (3.17)$$

利用Cauchy-Schwarz不等式和Poincaré不等式,

$$|I_6| \leq \|f - f^n\| \|u - U_h\| \leq C \|f - f^n\| \|u - U_h\|_1.$$

结合 $I_1, I_2 + I_4, I_3 + I_5, I_6$ 的估计式并对(3.8)式关于时间在 t^{n-1} 到 t^n 作积分, 有

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{d}{dt} \|u - U_h\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| |u - U_h^n| \|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| |u - U_h| \|^2 dt \\
 & \leq \frac{1}{6} \Delta t \| |U_h^n - U_h^{n-1}| \|^2 + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - U_h\|_1 dt \\
 & \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - U_h\|_1 dt + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\| \|u - U_h\|_1 dt
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

利用 ε -Cauchy 不等式以及 $\| | \cdot \|$ 与 $\| \cdot \|_1$ 的等价性, 有

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\|u^n - U_h^n\|^2 - \|u^{n-1} - U_h^{n-1}\|^2 \right) + \tilde{C} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u - U_h^n\|_1^2 dt \\
 & \leq \frac{1}{6} \|U_h^n - U_h^{n-1}\|_1^2 \cdot \Delta t + C \left(\eta^n \right)^2 \cdot \Delta t + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|^2 dt,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

将(3.19)式从 $n = 1$ 累加到 $n = m$ ($1 < m \leq N$), 结合 $U_h^0 = u^0$

$$\begin{aligned}
 & \|u^m - U_h^m\|^2 + \sum_{n=1}^m \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u - U_h^n\|_1^2 dt \\
 & \leq C \left(\sum_{n=1}^m \left(\left(\eta^n \right)^2 + \|U_h^n - U_h^{n-1}\|_1^2 \right) \right) \cdot \Delta t + C \sum_{n=1}^m \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|^2 dt,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

从而我们得到结果(3.5).

□

3.3 后验误差估计的下界

在这一节, 我们将得到误差 $\|u^n - U_h^n\|_1$ 的局部下界. 为此, 先介绍 bubble-函数的性质.

对每个三角形单元 $K \in \mathcal{T}_h$, 用 $\lambda_{K,1}, \lambda_{K,2}, \lambda_{K,3}$ 表示重心坐标(又称为面积坐标). 如下定义元 bubble-函数 ψ_K

$$\psi_K = 27\lambda_{K,1}\lambda_{K,2}\lambda_{K,3}, \text{ 在 } K; \quad \psi_K = 0, \text{ 在 } \Omega \setminus K.$$

对于每个内边 $E \in \mathcal{E}_h$, 设 K 和 K' 以边 E 为公共边. 令 $\lambda_{E,1}, \lambda_{E,2}$ 表示关于 E 终点的重心坐标, 定义边 bubble-函数 ψ_E 如下

$$\psi_E = 4\lambda_{E,1}\lambda_{E,2}, \text{ 在 } \omega_E = K \cup K'; \quad \psi_E = 0 \text{ 在 } \Omega \setminus \omega_E.$$

引理3.3 [31] 如上定义的 bubble-函数 ψ_K, ψ_E 满足

$$\text{supp } \psi_K \subset K, \quad \psi_K \in [0, 1], \quad \max_{x \in K} \psi_K = 1,$$

$$\int_K \psi_K dx = \frac{9}{20} |K| \sim h_K^2, \quad \|\nabla \psi_K\|_{0,K} \leq Ch_K^{-1} \|\psi_K\|_{0,K}.$$

$$\text{supp } \psi_E \subset \omega_E, \quad \psi_E \in [0, 1], \quad \max_{x \in \omega_E} \psi_E = 1,$$

$$\int_E \psi_E ds = \frac{2}{3} h_E, \quad \int_{\omega_E} \psi_E dx = \frac{1}{3} |\omega_E| \sim h_K^2, \quad \|\nabla \psi_E\|_{0,\omega_E} \leq Ch_E^{-1} \|\psi_E\|_{0,\omega_E}.$$

定义 R_K 在 K 上的积分平均 $(\overline{R_K})$, R_E 在 E 积分平均 $(\overline{R_E})$:

$$\overline{R_K} = \frac{1}{|K|} \int_K R_K dx, \quad \overline{R_E} = \frac{1}{|E|} \int_E R_E ds.$$

我们给出如下的局部下界及其证明.

定理3.2 对任意的 $K \in \mathcal{T}_h$, $E \in \mathcal{E}_h$, 存在与 h 无关的正常数 C , 使得关于误差 $u^n - U_h^n$ 的下列局部下界成立

$$h_K \|R_K\|_{0,K} \leq C \|u^n - U_h^n\|_{1,K} + h_K \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} \right\|_{0,K} + 2h_K \|R_K - \overline{R_K}\|_{0,K}, \quad (3.21)$$

以及

$$\begin{aligned} h_E^{\frac{1}{2}} \|R_E\|_{0,E} &\leq C \|u^n - U_h^n\|_{1,\omega_E} + Ch_E \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} \right\|_{0,\omega_E} \\ &\quad + Ch_K \|R_K - \overline{R_K}\|_{0,\omega_E} + h_E^{\frac{1}{2}} \|R_E - \overline{R_E}\|_{0,E}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

证: 根据三角不等式, 得

$$\|R_K\|_{0,K} \leq \|\overline{R_K}\|_{0,K} + \|R_K - \overline{R_K}\|_{0,K}, \quad (3.23)$$

借助于bubble-函数 ψ_K 的性质、 R_K 的定义以及Green公式, 可得

$$\begin{aligned} \|\overline{R_K}\|_{0,K}^2 &\sim (\overline{R_K}, \psi_K \overline{R_K}) = (R_K, \psi_K \overline{R_K}) - (R_K - \overline{R_K}, \psi_K \overline{R_K}) \\ &= \left(f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} + \nabla \cdot (a(x) \nabla U_h^n), \psi_K \overline{R_K} \right) - (R_K - \overline{R_K}, \psi_K \overline{R_K}) \\ &= \left(f^n - \frac{\partial u^n}{\partial t}, \psi_K \overline{R_K} \right) + \left(\frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \psi_K \overline{R_K} \right) \\ &\quad + \left(\nabla \cdot (a(x) \nabla U_h^n), \psi_K \overline{R_K} \right) - (R_K - \overline{R_K}, \psi_K \overline{R_K}) \\ &= a(u^n, \psi_K \overline{R_K}) - \int_K a(x) \nabla U_h^n \cdot \nabla (\psi_K \overline{R_K}) dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \psi_K \overline{R_K} \right) - (R_K - \overline{R_K}, \psi_K \overline{R_K}) \\ &= \int_K a(x) \nabla (u^n - U_h^n) \cdot \nabla (\psi_K \overline{R_K}) dx + \left(\frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \psi_K \overline{R_K} \right) \\ &\quad - (R_K - \overline{R_K}, \psi_K \overline{R_K}) \\ &\triangleq B_1 + B_2 + B_3. \end{aligned} \quad (3.24)$$

对于 B_1 项, 利用Cauchy-Schwarz不等式以及引理3.3, 得

$$\begin{aligned}
 |B_1| &\leq C|u^n - U_h^n|_{1,K} \left\| \nabla(\psi_K \overline{R_K}) \right\|_{0,K} = C|u^n - U_h^n|_{1,K} \|\nabla\psi_K\|_{0,K} \left| \overline{R_K} \right| \\
 &\leq Ch_K^{-1}|u^n - U_h^n|_{1,K} \|\psi_K\|_{0,K} \left| \overline{R_K} \right| = Ch_K^{-1}|u^n - U_h^n|_{1,K} \left\| \psi_K \overline{R_K} \right\|_{0,K} \\
 &\leq Ch_K^{-1}|u^n - U_h^n|_{1,K} \left\| \overline{R_K} \right\|_{0,K}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

借助于Cauchy-Schwarz不等式以及引理3.3, 有

$$|B_2| \leq \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} \right\|_{0,K} \left\| \psi_K \overline{R_K} \right\|_{0,K} \leq \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} \right\|_{0,K} \left\| \overline{R_K} \right\|_{0,K}, \tag{3.26}$$

$$|B_3| \leq \left\| R_K - \overline{R_K} \right\|_{0,K} \left\| \psi_K \overline{R_K} \right\|_{0,K} \leq \left\| R_K - \overline{R_K} \right\|_{0,K} \left\| \overline{R_K} \right\|_{0,K}. \tag{3.27}$$

结合(3.24)、(3.25)、(3.26)和(3.27), 得到(3.21).

为了得到(3.22), 由三角不等式, 与上述证明过程类似, 有

$$h_E^{\frac{1}{2}} \left\| R_E \right\|_{0,E} \leq h_E^{\frac{1}{2}} \left\| \overline{R_E} \right\|_{0,E} + h_E^{\frac{1}{2}} \left\| R_E - \overline{R_E} \right\|_{0,E}. \tag{3.28}$$

利用引理3.3以及Green公式, 有

$$\begin{aligned}
 \left\| \overline{R_E} \right\|_{0,E}^2 &\sim \left(\overline{R_E}, \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,E} = \left(R_E, \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,E} + \left(\overline{R_E} - R_E, \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,E} \\
 &= \left(a(x) \nabla U_h^n, \nabla(\psi_E \overline{R_E}) \right)_{0,\omega_E} + \left(\nabla \cdot (a(x) \nabla U_h^n), \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,\omega_E} \\
 &\quad + \left(\overline{R_E} - R_E, \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,E} \\
 &= \int_{\omega_E} a(x) \nabla U_h^n \cdot \nabla(\psi_E \overline{R_E}) dx - \int_{\omega_E} a(x) \nabla u^n \cdot \nabla(\psi_E \overline{R_E}) dx \\
 &\quad + \int_{\omega_E} a(x) \nabla u^n \cdot \nabla(\psi_E \overline{R_E}) dx + \left(\nabla \cdot (a(x) \nabla U_h^n), \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,\omega_E} \\
 &\quad + \left(\overline{R_E} - R_E, \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,E} \\
 &= \int_{\omega_E} a(x) \nabla (U_h^n - u^n) \cdot \nabla(\psi_E \overline{R_E}) dx - \int_{\omega_E} \nabla \cdot (a(x) \nabla u^n) (\psi_E \overline{R_E}) dx \\
 &\quad + \left(\nabla \cdot (a(x) \nabla U_h^n), \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,\omega_E} + \left(\overline{R_E} - R_E, \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,E} \\
 &= \int_{\omega_E} a(x) \nabla (U_h^n - u^n) \cdot \nabla(\psi_E \overline{R_E}) dx + \left(\nabla \cdot (a(x) \nabla U_h^n), \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,\omega_E} \\
 &\quad + \int_{\omega_E} \left(f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} \right) (\psi_E \overline{R_E}) dx + \int_{\omega_E} \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\partial u^n}{\partial t} \right) (\psi_E \overline{R_E}) dx \\
 &\quad + \left(\overline{R_E} - R_E, \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,E} \\
 &= \int_{\omega_E} a(x) \nabla (U_h^n - u^n) \cdot \nabla(\psi_E \overline{R_E}) dx + \left(R_K, \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,\omega_E} \\
 &\quad + \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\partial u^n}{\partial t}, \psi_E \overline{R_E} \right) + \left(\overline{R_E} - R_E, \psi_E \overline{R_E} \right)_{0,E} \\
 &\equiv \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 + \mathfrak{I}_4.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

需要估计(3.29)式的右端项.

利用引理3.3以及Cauchy-Schwarz不等式, 有

$$\begin{aligned}
 |\mathfrak{J}_1| &\leq C|U_h^n - u^n|_{1,\omega_E} \left\| \nabla(\psi_E \overline{R_E}) \right\|_{0,\omega_E} = C|U_h^n - u^n|_{1,\omega_E} \|\nabla\psi_E\|_{0,\omega_E} |\overline{R_E}| \\
 &\leq Ch_E^{-1} |U_h^n - u^n|_{1,\omega_E} \|\psi_E\|_{0,\omega_E} |\overline{R_E}| \leq C|U_h^n - u^n|_{1,\omega_E} |\overline{R_E}| \\
 &\leq Ch_E^{-\frac{1}{2}} |U_h^n - u^n|_{1,\omega_E} \left\| \overline{R_E} \right\|_{0,E}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathfrak{J}_2| &\leq \|R_K\|_{0,\omega_E} \left\| \psi_E \overline{R_E} \right\|_{0,\omega_E} = \|R_K\|_{0,\omega_E} \|\psi_E\|_{0,\omega_E} |\overline{R_E}| \\
 &\leq Ch_E \|R_K\|_{0,\omega_E} |\overline{R_E}| \leq Ch_E^{\frac{1}{2}} \|R_K\|_{0,\omega_E} \left\| \overline{R_E} \right\|_{0,E}.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathfrak{J}_3| &\leq \left\| \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|_{0,\omega_E} \left\| \psi_E \overline{R_E} \right\|_{0,\omega_E} \\
 &= \left\| \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|_{0,\omega_E} \|\psi_E\|_{0,\omega_E} |\overline{R_E}| \\
 &\leq Ch_E \left\| \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|_{0,\omega_E} |\overline{R_E}| \leq Ch_E^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|_{0,\omega_E} \left\| \overline{R_E} \right\|_{0,E}.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$|\mathfrak{J}_4| \leq \left\| \overline{R_E} - R_E \right\|_{0,E} \left\| \psi_E \overline{R_E} \right\|_{0,E} \leq \left\| \overline{R_E} - R_E \right\|_{0,E} \left\| \overline{R_E} \right\|_{0,E} \tag{3.33}$$

将(3.30)、(3.31)、(3.32)、(3.33)代入(3.29), 得

$$\begin{aligned}
 \left\| \overline{R_E} \right\|_{0,E} &\leq Ch_E^{-\frac{1}{2}} |U_h^n - u^n|_{1,\omega_E} + Ch_E^{\frac{1}{2}} \|R_K\|_{0,\omega_E} + Ch_E^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} \right\|_{0,\omega_E} \\
 &\quad + \left\| \overline{R_E} - R_E \right\|_{0,E}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

结合(3.21), 即得到结果(3.22).

□

3.4 数值算例

为了验证这一章的理论, 我们做两个数值算例来观察误差估计子的表现. 假定问题(3.1)的定义域为 $\Omega \times [0, T] = [0, 1; 0, 1] \times [0, 1]$. 对于空间 Ω , 首先将其分割成 J 个矩形, 然后将每个矩形分割成两个三角形, 从而得到对空间 Ω 初始剖分, 其直径为 $h = \sqrt{2}/J$. 对于时间项, 取步长 $\Delta t = 1/N$, $N = J^2$, 从而 $t^n = n\Delta t$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$). 我们观察以下两个例子:

例1: $a(x) = 1 + \sin\pi x_1 + \sin\pi x_2 + e^{2x_1} + e^{2x_2}$, $u(x, t) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2) e^t$.

例2: $a(x) = 1 + x_1 + x_2 + x_1^2 + x_2^2$, $u(x, t) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) e^{x_1 + x_2 + t}$.

用 \mathcal{E}_{global} 来表示全局误差, 用 η_{global} 来表示全局后验误差估计子, 定义如下

$$\mathcal{E}_{global} = \left(\sum_{k=1}^N \|u^k - U_h^k\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_{global} = \left(\sum_{n=1}^N \left((\eta^n)^2 + \|U_h^n - U_h^{n-1}\|_1^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

同时我们也计算了全局后验误差估计子与全局误差的比率 \mathcal{R} , $\mathcal{R} = \eta_{global} / \mathcal{E}_{global}$. 在表中也给出了 H^1 -模的收敛阶和计算机的工作时间.

表3.1: 当 $t^N = 1$ 时, 例1中 \mathcal{E}_{global} 与 η_{global} 的关系.

h	$\ u^N - U_h^N\ _1$	收敛阶	\mathcal{E}_{global}	η_{global}	\mathcal{R}	工作时间(s)
$1/2^2$	0.1603	-	0.4350	19.5469	44.9380	0.2340
$1/2^3$	0.0821	0.9653	0.4351	20.4899	47.0928	0.3276
$1/2^4$	0.0413	0.9912	0.4351	20.9317	48.1081	1.9656
$1/2^5$	0.0207	0.9965	0.4351	21.1501	48.6104	234.1107
$1/2^6$	0.0103	1.0070	0.4351	21.2586	48.8600	4.0637e+04

表3.2: 当 $t^N = 1$ 时, 例2中 \mathcal{E}_{global} 与 η_{global} 的关系.

h	$\ u^N - U_h^N\ _1$	收敛阶	\mathcal{E}_{global}	η_{global}	\mathcal{R}	工作时间(s)
$1/2^2$	7.7555	-	21.0509	347.8023	16.5219	0.2496
$1/2^3$	3.9815	0.9619	21.1118	379.0257	17.9533	0.3120
$1/2^4$	2.0027	0.9914	21.1117	389.6060	18.4545	2.6052
$1/2^5$	1.0028	0.9979	21.1106	393.7090	18.6498	384.9481
$1/2^6$	0.5016	0.9994	21.1102	395.4580	18.7330	4.1616e+04

从表1、表2中, 可以发现有限体积元解与真解之间的误差的 H^1 -模是一阶收敛的, 这与引理3.2所述相同. 通过观察, 可得整体后验误差估计子可以预测出真实误差的大小. 事实上随着剖分直径 h 趋向于0, 整体后验误差估计子与整体误差的比率 \mathcal{R} 趋向于某个常数. 这意味着整体后验误差估计和真实的整体误差有相同的收敛性.

后验误差估计是自适应网格剖分的必备前提, 自适应网格剖分的思想为在误差大的单元加细网格, 以实现减小误差并缩短工作时间的目的. 如何利用这一章所述的后验误差估计的理论来实现自适应网格剖分将是我们日后工作的重点.

参考文献

- [1] A. Lasis, E. Süli, hp-version discontinuous Galerkin finite element method for semilinear parabolic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(2007) 1544-1569.
- [2] C. Bi, V. Ginting, Two-grid finite volume element method for linear and nonlinear elliptic problems. *Numer. Math.* 108(2007) 177-198.
- [3] C. Bi, V. Ginting, A residual-type a posteriori error estimate finite volume element method for a quasi-linear elliptic problem, *Numer. Math.*, 114(2009) 107-132.
- [4] C. Carstensen, R. Lazarov, S. Tomov, Explicit and averaging a posteriori error estimates for adaptive finite volume methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2005) 2496-2521.
- [5] C. Chen, M. Yang, C. Bi, Two-grid methods for finite volume element approximations of nonlinear parabolic equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 228(2009) 123-132.
- [6] C. Chen, W. Liu, Two-grid finite volume element methods for semilinear parabolic problems, *Appl. Numer. Math.*, 60(2010) 10-18.
- [7] C. G. Broyden, The convergence of single-rank quasi-Newton method, *Mathematics of Computation*, 110(1970) 365-382.
- [8] C. N. Dawson, M. F. Wheeler, C. S Woodward, A two-grid finite difference scheme for nonlinear parabolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(1998) 435-452.
- [9] C. N. Dawson, M. F. Wheeler, two-grid methods for mixed finite element approximations of nonlinear parabolic equations, *Contemp. Math.*, 180(1994) 191-203.
- [10] F. Gao, Y. Yuan, The characteristic finite volume element method for the nonlinear convection-dominated diffusion problem, *Comput. Math. Appl.* 56(1)(2008) 71-81.
- [11] H. Rui, Symmetric modified finite volume element methods for self-adjoint elliptic and parabolic problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 146(2002) 373-386.
- [12] I. Babuška, C. Rheinboldt, Error estimates for adaptive finite element computations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(1978) 736-754.
- [13] I. D. Mishev, Finite volume methods on Voronoi meshes, *Numer. Meth. PDEs*, 14(1998) 193-212.
- [14] J. Xu, A novel two-grid method for semilinear elliptic equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(1994) 231-237.
- [15] J. Xu, Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs, *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1996) 1759-1777.

-
- [16] J. Xu, Y. Zhu, Q. Zou, New adaptive finite volume methods and convergence analysis, *Numer. Math.*, (submitted). Available online at <http://www.math.psu.edu/xu/>.
- [17] L. Chen, Y. Chen, Two-grid method for nonlinear reaction-diffusion equations by mixed finite element methods, *J. Sci. Comput.*, 49(2011) 383–401.
- [18] L. R. Scott, S. Zhang, Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary condition, *Math. Comput.*, 54(1990) 483–493.
- [19] L. Wu, M. B. Allen, A two-grid method for mixed finite-element solutions of reaction-diffusion equations, *Numer. Meth. PDEs*, 15(1999) 589–604.
- [20] M. Ainsworth, J.T. Oden, A posteriori error estimation in finite element analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 142(1997) 1–88.
- [21] P. Chatzipantelidis, R. D. Lazarov, V. Thomée, Error estimate for a finite volume element method for parabolic equations in convex polygonal domains, *Numer. Meth. PDEs*, 20(2004) 650–674.
- [22] P. Chatzipantelidis, V. Ginting, R. D. Lazarov, A finite volume element method for a nonlinear elliptic problem, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 12(2005) 515–546.
- [23] P. Chatzipantelidis, V. Ginting, A finite volume element method for a nonlinear parabolic problem, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 45(2013) 121–136.
- [24] R. E. Bank, D. J. Rose, Some error estimates for the box method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(1987), 777–787.
- [25] R. E. Ewing, R. D. Lazarov, Y. P. Lin, Finite volume element approximations of nonlocal reactive flows in porous media, *Numer. Meth. PDEs*, 16(2000) 285–311.
- [26] R. E. Ewing, T. Lin, Y. P. Lin, On the accuracy of the finite volume element method based on piecewise linear polynomials, *SIAM J. Numer. Anal.* 39(2002) 1865–1888.
- [27] R. Lazarov, S. Tomov, Adaptive finite volume element method for convection-diffusion-reaction problems in 3D, In: Mineev, Y.W.P., Lin, Y. (eds.) *Scientific Computing and Application*. Nova Science Publishing House, Huntington, (2001) 91–106.
- [28] R. A. Adams, *Soblev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.
- [29] R. Lazarov, S. Tomov, A posteriori error estimates for finite volume approximations of convection diffusion-reaction equations. *Comput. Geosci.*, 6(2002) 483–503.
- [30] R. Li, Z. Chen, W. Wu, *Generalized Difference Methods for Differential Equations Numerical Analysis of Finite Volume Methods*, New York: Marcel Dekker Inc., 2000.
- [31] R. Verfürth, *A Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-refinement Techniques*, Chichester: Wiley-Teubner, 1996.

- [32] R. Verfürth, A posteriori error estimates for finite element discretizations of the heat equation, *Calcolo*, 40(2003) 195-212.
- [33] S. Brenner, L. Scott, *The Mathematics Theory of Finite Element Methods*, New York: Springer-Verlag, 2008.
- [34] S. H. Chou, D. Y. Kwak, Q. Li, L^p error estimates and superconvergence for covolume or finite volume element methods, *Numer. Methods PDEs.*, 19(2003), 463-486.
- [35] S. H. Chou, Q. Li, Error estimates in L^2 , H^1 and L^∞ in covolume methods for elliptic and parabolic problems: a unified approach, *Math. Comp.*, 69(2000), 103-120.
- [36] T. Zhang, The semidiscrete finite volume element method for nonlinear convection-diffusion problem, *Appl. Math. Comput.*, 217(2011) 7546-7556.
- [37] V. Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, Berlin, 2006.
- [38] W. Bangerth, R. Rannacher, *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*, Basel: Lectures in Mathematics, ETH-Zürich Birkhäuser, 2003.
- [39] W. Hackbusch, On first and second order box schemes, *Computing*, 41(1989), 277-296.
- [40] X. Ye, A posterior error estimate for finite volume methods of the second order elliptic problem, *Numer. Meth. PDEs*, 27(2011) 1165-1178.
- [41] Y. Chen, Y. Huang, D. Yu, A two-grid method for expanded mixed finite-element solution of semilinear reaction-diffusion equations, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 57(2003) 139-209.
- [42] Y. Chen, H. Liu, S. Liu, Analysis of two-grid methods for reaction diffusion equations by expanded mixed finite element methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 69(2007) 408-422.
- [43] Y. Chen, P. Luan, Z. Lu, Analysis of two-grid methods for nonlinear parabolic equations by expanded mixed finite element methods, *Adv. Appl. Math. Mech.*, 1(2009) 830-844.
- [44] Z. Cai, On the finite volume element methods, *Numer. Math.* 58(1991) 713-735.
- [45] Z. Cai, S. McCormick, On the accuracy of the finite volume element method for diffusion equations on composite grids, *SIAM J. Numer. Anal.* 27(1990) 636-655.
- [46] Z. Chen, J. Feng, An adaptive finite element algorithm with reliable and efficient error control for linear parabolic problems, *Math. Comput.*, 73(2004) 1167-1193.
- [47] Z. Chen, R. H. Nochetto, A. Schmidt, A characteristic Galerkin method with adaptive error control for continuous casting problem, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 189(2000) 249-276.
- [48] Z. Chen, S. Dai, Adaptive Galerkin methods with error control for a dynamical Ginzburg-Landau model in superconductivity, *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(2001) 1961-1985.
- [49] 方志朝, 发展型方程的混合有限体积元方法及数值模拟, 内蒙古大学博士学位论文, 2013.

[50] 李人宪, 有限体积法基础, 国防工业出版社, 2005.

[51] 林群, 微分方程数值解法基础教程(第二版), 科学出版社, 2001.

攻读学位期间发表的学术论文目录

[1]陈传军, 赵鑫, 一类非线性对流扩散方程两重网格特征有限元方法及误差估计. 数学物理学报, 34A(2014), 643–654.

[2]C. J. Chen, X. Zhao, A two-grid finite volume element approximation for one-dimensional nonlinear parabolic equations.(submitted)

[3]C. J. Chen, X. Zhao, Residual-type a posteriori error estimates for finite volume element method of parabolic equations.(submitted)

致谢

随着毕业论文的完成,我的研究生生活也将结束.在这短短的几个月的时间里,让我学到了以前在书本上学不到的知识.让我度过了研究生期间最为充实的一段时期,而且收获了理论和实践上的第一桶金.

在论文的写作过程中遇到了无数的困难和障碍,都在同学和老师的帮助下度过了.尤其要感谢我的导师陈传军老师,他对我进行了无私的指导和帮助,不厌其烦的帮助进行论文的修改和改进.在做毕业论文的这段时间,他深厚的学术修养,严谨的治学态度,强烈的责任心和对学生的无私关怀,将令我收益终身.另外,在校图书馆查找资料的时候,图书馆的老师也给我提供了很多方面的支持与帮助.

感谢我的同学和朋友,在我写论文的过程中给予我的很多素材,还在论文的撰写和排版的过程中提供热情的帮助.

同时,我还要感谢我系其他老师杨旻、毕春加、张媛媛给予我的帮助.

本人感谢数学院给予的学习工作环境.

由于我的学术水平有限,所写论文难免有不足之处,恳请各位老师和同学批评和指正!

版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以任何方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。