

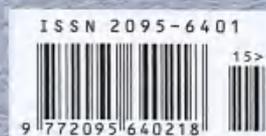


ISSN 2095-6401  
CN 63-1080/G4

# 西部素质教育

WESTERN CHINA QUALITY EDUCATION

- ◆ 国际DOI中国注册与服务中心（学术期刊）全文收录期刊
- ◆ 中国核心期刊（遴选）数据库全文收录期刊
- ◆ 万方数据——数字化期刊群入编期刊
- ◆ 中文科技期刊数据库全文收录期刊



2021年8月 第7卷 第15期

青海人民出版社有限责任公司 主管 主办

# “三全育人”视域下研究生思想政治教育 创新模式研究

## ——以烟台大学数学与信息科学学院为例

邱文伟,张晔,陈传军

(烟台大学数学与信息科学学院,山东烟台,264005)

**摘要:**文章首先阐述了“三全育人”视域下研究生思想政治教育的现实意义,然后分析了“三全育人”视域下研究生思想政治教育的现状,最后提出了“三全育人”视域下研究生思想政治教育的创新模式,包括以思想引领为核心,打牢“三全育人”根基;提升“课程思政”功效,打造学风育人阵地;加强党的组织建设,打造组织育人阵地;等等。

**关键词:**思想政治教育;研究生;“三全育人”

**中图分类号:**G643.1

**文献标志码:**A

**文章编号:**2095-6401(2021)15-0009-03

习近平总书记在全国高校思想政治工作会议上强调,“高校思想政治工作关系高校培养什么样的人、如何培养人以及为谁培养人这个根本问题”,要求高校始终“坚持把立德树人作为中心环节”。高校在开展教育教学的过程中应当始终贯穿思想政治教育,从而开创高等教育事业发展的新局面<sup>[1]</sup>。研究生思想政治工作在高校人才培养体系中占有举足轻重的地位,担负着科教兴国和实现中华民族伟大复兴的历史使命,是教育和培养人才不可分割的一部分<sup>[2]</sup>。在当前高校研究生扩招、培养模式多样化的大背景下,主动改革研究生思想政治教育模式,客观地分析新时期研究生思想政治工作面临的形势及存在的主要问题,积极探索有效的对策,对培养具有历史使命感和社会责任心、富有创新精神和实践能力的高素质人才具有重要作用。

### 一、“三全育人”视域下研究生思想政治教育的现实意义

习近平总书记在学校思想政治理论课教师座谈会上强调,“要坚持显性教育和隐性教育相统一,挖掘其他课程和教学方式中蕴含的思想政治教育资源,实现全员全程全方位育人”。习近平总书记提出的关于“三全育人”的理念阐述不但为当前高校思想政治工作指明了方向,还为高校开展研究生思想政治工作提供了科学遵循。“三全育人”视域下研究生思想政治教育具有现实意义,具体如下。

#### (一)践行社会主义核心价值观的内在需要

习近平总书记强调,“青年的价值取向决定了未来整个社会的价值取向,而青年又处在价值观形成和确定的时期,抓好这一时期的价值观养成十分重要”。青年学生的价值观如何,对其成长成才起决定性作用。研究生

是当今社会的高级知识分子的后备力量,高校应当积极引导,使其牢固树立社会主义核心价值观。期间,通过实施思想政治教育,引导研究生树立远大理想,将国家利益放在首位,将个人价值追求与国家发展命运紧密相连,牢记社会主义新人的历史使命和责任。同时,新时代的研究也应该提升个人价值追求,将社会主义核心价值观作为自己深造学业、开展科学研究的价值遵循。

#### (二)厚植爱国情怀的必然选择

爱国主义是中华民族精神的核心要义,爱国情怀一直是高校思想政治教育的主旋律<sup>[3]</sup>。研究生群体既有与本科生相同的地方,也有其独有的特征,在建设社会主义现代化的历史征程中,研究生承载着党和国家的希望,是实现中华民族伟大复兴的中坚力量。在中国特色社会主义事业的进程中,开展有针对性的思想政治教育,对研究生进行主题鲜明的爱国情怀培育,培养具有深厚爱国精神、立志科技报国的高素质人才,是时代赋予高校的使命,也是高校义不容辞的责任,更是引导研究生厚植爱国情怀的必然选择。

#### (三)研究生人才培养的基础和保障

育人先育德。研究生经过大学本科阶段的培养,进入学习方式、管理方式、教育模式均有别于大学本科阶段的教育体系,在由大学本科管理的“紧”到研究生管理的“松”的培养模式变化下,研究生的思想极易产生变化,而各种社会思潮和社会舆论也会影响研究生的价值取向,稍有疏忽,研究生的思想就会进入误区。在新时代背景下,高校思想政治工作有助于发挥正面教育效应,引导研究生形成良好的思想意识和高尚的理想信念。高校要遵循“育人先育德”的教育理念,夯实研究生培养的基础,为研究生开展学术科研、投身科技创新提供思想保

DOI: 10.16681/j.cnki.wcqe.202115003

作者简介:邱文伟(1981—),男,汉族,山东滕州人,副教授,硕士。

注:本文系2019年烟台大学教学改革研究项目“大学生‘贯通式’创新创业课程体系研究”的部分成果(编号:jyxm2019042)。

## 二部图的单特征值

王 燕, 李家豪, 李清华 \*

(烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

**摘 要:** 一个图的特征值通常指的是它的邻接矩阵的特征值, 在图的所有特征值中, 重数为 1 的特征值即所谓的单特征值具有特殊的重要性. 确定一个图的单特征值是一个比较困难的问题, 主要是没有一个通用的方法. 1969 年, Petersdorf 和 Sachs 给出了点传递图单特征值的取值范围, 但是对于具体的点传递图还需要根据图本身的特性来确定它的单特征值. 给出一类正则二部图, 它们是二面体群的凯莱图, 这类图的单特征值中除了它的正、负度数之外还有 0 或者  $\pm 1$ , 而它们恰好是 Petersdorf 和 Sachs 所给出的单特征值范围内的中间取值.

**关键词:** 二部图; 凯莱图; 特征值

### 1 引言

在图论中, 图的特征值和特征向量通常指的是其邻接矩阵的特征值和特征向量. 图的谱指的是图的特征值和它们的重数. 图的谱是图的一个重要的代数不变量, 它反映出图的许多重要的组合性质. 关于图谱的相关介绍, 请参考文献 [1] 和 [2]. 到目前为止, 仅少数图的特征值被计算出来. 完全图, 半正则二部图, 循环图, 路等最基本的图的谱最早被算出 [3]. 专著 [4] 的附录中一一列举了含有七个顶点的所有连通简单图 (853 个) 的特征值. 与化学密切相关的图类中, 有  $N$  个六角形的六角形直链的特征值为  $\pm 1$  和  $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{9 + 8 \cos \frac{\pi j}{N+1}})$ ,  $j = 1, \dots, N$  [3]. 最近二十几年来, 也有一些特殊图的谱被计算出来, 例如 De Bruijn 图和 Kautz 图 [3], Knodel 图 [4], 正则与半正则多面体 [5-6], 旋转度为零的环面六角系统 [7] 等等.

在一个图的所有特征值中, 重数为 1 的特征值被称为单特征值. 这种单特征值往往表达出图的某些特殊性质, 因此研究图的单特征值具有一定的意义. 众所周知, 连通  $k$ -正则图 (即任意点的度是  $k$ ) 的任一特征值  $\lambda$  满足  $|\lambda| \leq k$ , 而且  $k$  是单特征值. 相似的, 连通  $k$ -正则二部图的任一特征值  $\mu$  满足  $|\mu| \leq k$ , 而且  $k$  和  $-k$  都是单特征值. 因此, 正则二部图的单特征值至少是两个. 关于二部图特征值的研究也有不少工作, 请参考文献 [8-11]. 特别地, Mohar 在 [8] 中研究了二部图的“中间”特征值, 给出了一个范围.

如果一个图的自同构群在图的顶点集合上作用传递, 则称这个图是一个点传递图. 点传递图是一类正则图. 那么, 一个点传递二部图除了它的正、负度数之外还有没有单特征值?

收稿日期: 2020-09-08

资助项目: 国家自然科学基金 (1671347, 61771019); 山东省自然科学基金 (ZR2017MA022); 山东省本科教改重点项目 (Z2018S049)

\* 通信作者

或者说,如何确定一个点传递二部图除去它的正、负度数之外的单特征值?在文献 [12] 中, Petersdorf 和 Sachs 给出了点传递图单特征值的范围,但是对于具体的点传递图还需要根据图本身的特性来确定它的单特征值.在文献 [13] 中,作者特别考虑了 Petersdorf 和 Sachs 的理论在凯莱图上的表现,而在文章文献 [14] 中作者给出了两类恰好具有两个单特征值的循环图,证明了对于 Petersdorf 和 Sachs 给出的点传递图单特征值范围内的取值,都有相应的循环图以这个值为单特征值.本文中,我们给出了恰好具有 3 个  $(\{k, -k, 0\})$  或者 4 个  $(\{k, -k, \pm 1\})$  单特征值的一类二部图,这里  $k$  是图的度数,这类图是二面体群的凯莱图.特别地, 0 或者  $\pm 1$  恰好是 Petersdorf 和 Sachs 所给出的单特征值范围内的中间取值.

## 2 预备知识

**定义 2.1(右循环矩阵)**  $R = (r_{st})_{n \times n}$  是一个  $n \times n$  矩阵,如果  $R$  的第  $s$  行是  $R$  的第一行向右平移  $s-1$  步得到的,那么称  $R$  是右循环矩阵.也就是说,  $R$  中的元素满足  $r_{st} = r_{1, t-s+1}$ . 其中,下标属于  $\{1, 2, \dots, n\}$  且模  $n$  运算.

**定义 2.2(左循环矩阵)**  $L = (l_{st})_{n \times n}$  是一个  $n \times n$  矩阵,如果  $L$  的第  $s$  行是  $L$  的第一行向左平移  $s-1$  步得到的,那么称  $L$  是左循环矩阵.也就是说,  $L$  中的元素满足  $l_{st} = l_{1, s+t-1}$ . 其中,下标是模  $n$  运算并且属于  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

为了在以后的叙述中更加方便,我们用  $[r_1, r_2, \dots, r_n]_R$  表示右循环矩阵,其中,  $r_m, 1 \leq m \leq n$  是该矩阵的第一行元素,用  $[l_1, l_2, \dots, l_n]_L$  表示左循环矩阵,其中,  $l_m, 1 \leq m \leq n$  是该矩阵的第一行元素.

**注** 1) 从定义可以看出,左循环矩阵是对称矩阵;

2) 在图论中,循环矩阵通常指的是右循环矩阵.在本文中,为区分这两种平移方式得到的矩阵,我们分别定义了左循环矩阵和右循环矩阵.然而,这两种循环矩阵之间也有一定的联系.

**引理 2.3**<sup>[13]</sup> 令  $L$  是左循环矩阵,那么,  $L^2$  是右循环矩阵而且也是对称矩阵.

**引理 2.4** 令  $L = [l_1, l_2, \dots, l_n]_L$  和  $R = [r_1, r_2, \dots, r_n]_R$  分别是一个  $n$ -级左循环矩阵和一个  $n$ -级右循环矩阵且  $R = L^2$ . 则

$$r_s = \sum_{j=1}^{n-s} l_j l_{j+s} + \sum_{k=n-s+1}^n l_k l_{k-n+s-1}, 1 \leq s \leq n.$$

**证明** 因为  $R = L^2$ , 所以  $(r_1, r_2, \dots, r_n) = (l_1, l_2, \dots, l_n)L$ . 由矩阵乘法容易得到结论.

**引理 2.5**<sup>[13]</sup> 令  $L = [l_1, l_2, \dots, l_n]_L$  是左循环矩阵,  $L^2 = [r_1, r_2, \dots, r_n]_R$ , 那么

$$\sum_{k=1}^n r_k = \left( \sum_{m=1}^n l_m \right)^2.$$

**定义 2.6** 假定  $G$  是有限群,  $S$  是  $G$  的子集. 如果  $S$  中不含单位元, 逆封闭, 并且可以生成  $G$ , 则称  $S$  是  $G$  的一个凯莱子集. 如果一个图的顶点集合为  $G$ , 两个顶点  $g$  和  $h$  相邻当且仅当  $g^{-1}h \in S$ , 则称这个图为  $G$  相应于凯莱子集  $S$  的一个凯莱图, 记作  $\text{Cay}(G, S)$ .

众所周知, 右循环矩阵的特征值可以用其第一行元素表示出来. 下面两个引理请参考文献 [1].

**引理 2.7**<sup>[1]</sup> 令  $R = [r_0, r_1, \dots, r_{n-1}]_R$  为一个右循环矩阵, 那么  $R$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_t = r_0 + r_1\varpi_t + r_2\varpi_t^2 + \dots + r_{n-1}\varpi_t^{n-1}$ , 其中  $\varpi_t = e^{\frac{2t\pi i}{n}}$ ,  $0 \leq t \leq n-1$ , 其中  $i^2 = -1$ .

**引理 2.8**<sup>[1]</sup> 令  $\Gamma$  为连通  $k$  度点传递图,  $\lambda$  是  $\Gamma$  的单特征值. 如果  $\Gamma$  有奇数个顶点, 那么  $\lambda = k$ ; 如果  $\Gamma$  有偶数个顶点, 那么  $\lambda = 2\alpha - k$ , 其中  $\alpha$  是满足  $0 \leq \alpha \leq k$  的某个值.

由引理 2.8 可以看出, 点传递图的单特征值问题主要是针对偶数点的点传递图. 二面体群的凯莱图是具有偶数点的点传递图, 下文中我们将给出由二面体群构造出的一类二部图, 并研究其单特征值.

### 3 凯莱二部图的单特征值

令  $D_n = \{\theta, \tau | \theta^n = \tau^2 = 1, \tau\theta\tau = \theta^{-1}\}$  是阶为  $2n$  的二面体群,  $S = \{\tau, \tau\theta^u, \tau\theta^v, \dots, \tau\theta^w\}$  是  $D_n$  的凯莱子集,  $S$  中有  $k$  个元素, 易知凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S)$  是一个二部图. 在文献 [13] 中给出了这类图的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

这里  $B = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]_L$  是左循环  $\{0, 1\}$ - 矩阵 (即元素都是 0 或者 1 的矩阵), 其中  $b_j = 1$  当且仅当  $\tau\theta^{j-1} \in S$ . 因此,  $k = \sum_{t=0}^{n-1} b_t$ , 而且由引理 2.5 知  $B^2$  是右循环矩阵. 记  $B^2 = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]_R$ , 那么  $\sum_{t=0}^{n-1} c_t = k^2$ . 因为  $B^2$  是右循环矩阵, 所以根据引理 2.7 可知  $B^2$  的特征值为

$$\mu_t = c_0 + c_1\varpi_t + c_2\varpi_t^2 + \dots + c_{n-1}\varpi_t^{n-1}, \varpi_t = e^{\frac{2t\pi i}{n}}, t = 0, 1, \dots, n-1.$$

而且由于  $B^2$  是对称矩阵可知  $c_t = c_{n-t}$ , 再由简单计算可以看出  $\varpi_{n-t} = \varpi_t^{-1}$ , 因此可得到  $\mu_t = \mu_{n-t}$ . 这样,  $B^2$  的所有可能的单特征值是  $\mu_0 = \sum_{t=0}^{n-1} c_t = k^2$  和当  $n$  为偶数时的

$$\mu_{\frac{n}{2}} = c_0 - c_1 + c_2 - \dots - c_{n-1}.$$

在文献 [13] 中, 作者已经讨论过这类矩阵的单特征值, 证明了  $A$  的单特征值必定是  $B$  或者  $-B$  的单特征值, 而且  $B$  或者  $-B$  的单特征值是由  $B^2$  的单特征值开方得到, 但是反之不一定成立.

**引理 3.1**<sup>[13]</sup> 令  $D_n, S, A, B$  分别为上面所描述的二面体群, 其凯莱子集和邻接矩阵. 则当  $n$  是奇数时,  $A$  恰好有两个单特征值  $k$  和  $-k$ ; 当  $n$  是偶数时, 它除去  $\pm k$  外至多有两个单特征值, 也就是

$$\pm \sqrt{c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots - c_{n-1}}$$

如果我们把它写成  $2\alpha - k$  的形式, 那么

$$\alpha = \frac{k \pm \sqrt{c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots - c_{n-1}}}{2}.$$

这个结论虽然给出了  $A$  的可能存在的单特征值, 但是没有一般的方法可以确定这个值的确是  $A$  的单特征值, 这要依赖于矩阵  $B$ . 现在我们考虑  $D_n$  的一类特殊的凯莱图, 即令  $S = \{\tau\theta^j, \tau\theta^{j+1}, \tau\theta^{j+2}, \dots, \tau\theta^{j+k-1}\}$ , 则有下面的引理 3.2.

**引理 3.2** 令  $D_n = \{\theta, \tau \mid \theta^n = \tau^2 = 1, \tau\theta\tau = \theta^{-1}\}$  是阶为  $2n$  的二面体群,

$$S = \{\tau\theta^j, \tau\theta^{j+1}, \tau\theta^{j+2}, \dots, \tau\theta^{j+k-1}\}, S_0 = \{\tau, \tau\theta, \tau\theta^2, \dots, \tau\theta^{k-1}\},$$

其中  $\theta$  的方幂模  $n$  运算. 则  $\text{Cay}(D_n, S)$  同构于  $\text{Cay}(D_n, S_0)$ .

**证明** 定义  $f: D_n \rightarrow D_n$ , 使得  $f(\theta) = \theta, f(\tau) = \tau\theta^j$  并且将其扩充为  $D_n$  的一个群自同构. 因此,  $f(\tau\theta^r) = f(\tau\theta^{r+j})$ , 从而  $f(S_0) = S$  并且  $f$  是  $\text{Cay}(D_n, S_0)$  到  $\text{Cay}(D_n, S)$  的一个同构.

由引理 3.2, 凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S)$  和  $\text{Cay}(D_n, S_0)$  具有相同的特征值. 凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S_0)$  的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

这里  $B = [1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0]_L$  是左循环矩阵, 其第一行元素具有  $k$ - 个连续的 1, 其它元素都为 0. 根据引理 3.1, 我们只需要在  $n$  是偶数的前提下从  $B^2$  的单特征值出发确定  $A$  是否有单特征值.

**定理 3.3** 令  $B = [1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0]_L$  是  $n$ - 阶左循环矩阵, 其第一行元素具有  $k$ - 个连续的 1, 其它元素都为 0. 则当  $n$  是偶数时, 对于右循环  $n$ - 阶对称矩阵  $B^2 = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$  有以下结论成立.

1)  $c_0 = k, c_1 = k-1, \dots, c_{k-1} = 1, c_t = 0, k \leq t \leq n-k, c_{n-k+1} = 1, c_{n-k+2} = 2, \dots, c_{n-1} = k-1$ .

2)  $B^2$  的特征值  $\mu_t = k + 2 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) \cos \frac{2jt\pi}{n}, t = 0, 1, \dots, n-1$ .

3)

$$\mu_{\frac{n}{2}} = c_0 - c_1 + c_2 - \dots - c_{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } k \text{ 是奇数,} \\ 0, & \text{如果 } k \text{ 是偶数.} \end{cases} \quad (3)$$

**证明** 由引理 2.4  $c_s = \sum_{j=0}^{n-s-1} b_j b_{j+s} + \sum_{j=n-s}^{n-1} b_j b_{j-n+s}, 1 \leq s \leq n$ , 这里  $b_0 = \dots = b_{k-1} = 1, b_j = 0, k \leq j \leq n-1$ . 通过计算可以得到  $c_0 = k, c_1 = k-1, \dots, c_{k-1} = 1, c_t = 0, k \leq t \leq n-k, c_{n-k+1} = 1, c_{n-k+2} = 2, \dots, c_{n-1} = k-1$ .

由于  $B^2$  的特征值为  $\mu_t = c_0 + c_1 \varpi_t + c_2 \varpi_t^2 + \dots + c_{n-1} \varpi_t^{n-1}, \varpi_t = e^{\frac{2t\pi i}{n}}, t = 0, 1, \dots, n-1$ , 将上述  $c_j, 0 \leq j \leq n-1$  的值代入可得到

$$\mu_t = k + 2(k-1) \cos \frac{2t\pi}{n} + \dots + 2(k-(k-2)) \cos \frac{2(k-2)t\pi}{n} + 2(k-(k-1)) \cos \frac{2(k-1)t\pi}{n}.$$

特别地, 当  $t = \frac{n}{2}$  时可以得到  $\mu_{\frac{n}{2}} = 1$  或者 0 分别对应于  $k$  是奇数或者偶数.

根据定理 3.3 可知, 当  $n$  是偶数时本节给出的二部凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S)$  最多有 4 个单特征值, 即当  $k$  是奇数单特征值为  $k, -k, 1, -1$ , 此时相应于引理 2.8 中的  $\alpha = \frac{k+1}{2}$  和  $\alpha = \frac{k-1}{2}$ , 而当  $k$  是偶数单特征值为  $k, -k, 0$ , 此时相应于引理 2.8 中的  $\alpha = \frac{k}{2}$ . 现在的问题是  $\mu_{\frac{n}{2}}$  有没有可能和  $\mu_t, t \neq 0, \frac{n}{2}$  中的某个值相等, 这种情况下  $\mu_{\frac{n}{2}}$  不再是单特征值. 下面我们给出  $2 \leq k \leq 9$  时  $\text{Cay}(D_n, S)$  恰好具有 3 个或者 4 个单特征值的充分必要条件.

**例 3.1** 根据定理 3.3,  $\mu_t = k + 2 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) \cos \frac{2jt\pi}{n}, t = 0, 1, \dots, n-1$ .

1) 当  $k = 2$  时,  $\mu_t = 2 + 2 \cos \frac{2t\pi}{n}$ . 此时  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$ . 计算  $\mu_t = 0$  可以得到  $t = \frac{(2m+1)n}{2}$ ,  $m \in Z$ . 但是由于  $0 \leq t \leq n-1$  等式  $t = \frac{(2m+1)n}{2}$  成立仅当  $m = 0, t = \frac{n}{2}$ , 这说明 0 的确是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根.

2) 当  $k = 3$  时,  $\mu_t = 3 + 4 \cos \frac{2t\pi}{n} + 2 \cos \frac{4t\pi}{n}$ . 此时  $\mu_{\frac{n}{2}} = 1$ . 计算  $\mu_t = 1$  可以得到  $t = \frac{(2m+1)n}{4}$ ,  $m \in Z$ . 但是由于  $0 \leq t \leq n-1$  等式  $t = \frac{(2m+1)n}{4}$  成立仅当  $m = 0, t = \frac{n}{4}$  或者  $m = 1, t = \frac{3n}{4}$ , 这说明当  $n$  不能被 4 整除时 1 和  $-1$  的确是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根.

3) 类似于  $k = 2, 3$  时的情形, 当  $k = 4$  时  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$  是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根当且仅当  $n$  不能被 4 整除; 当  $k = 5, 7$  时  $\mu_{\frac{n}{2}} = \pm 1$  是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根当且仅当  $n$  不能被 3, 4 整除; 当  $k = 6, 8$  时  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$  是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根当且仅当  $n$  不能被 3, 4 整除; 当  $k = 9$  时  $\mu_{\frac{n}{2}} = \pm 1$  是  $A$  (或者  $\text{Cay}(D_n, S)$ ) 的单特征根当且仅当  $n$  不能被 3, 4, 5 整除.

从例 3.1 可以看出, 只要当  $t \neq 0, \frac{n}{2}$  时,  $\mu_t \neq \mu_{\frac{n}{2}}$  则  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$ , 或者  $\pm 1$  即为  $\text{Cay}(D_n, S)$  的单特征值. 考虑到  $2 \leq k \leq n, 1 \leq t \leq n-1$ , 必定存在足够大的素数  $p, n = 2p$  使得当  $t \neq 0, \frac{n}{2}$  时  $\mu_t \neq 0, \pm 1$ . 由此, 我们给出下面的猜想.

**猜想 3.1** 令  $D_n = \{\theta, \tau \mid \theta^n = \tau^2 = 1, \tau\theta\tau = \theta^{-1}\}$  是阶为  $2n$  的二面体群,

$$S = \{\tau, \tau\theta, \tau\theta^2, \dots, \tau\theta^{k-1}\}, k \geq 2,$$

这里  $\theta$  的方幂模  $n$  运算. 则当  $n = 2p, p$  为充分大的素数时, 凯莱图  $\text{Cay}(D_n, S)$  恰好有 3 个或者 4 个单特征值, 即当  $k$  是奇数时为  $k, -k, 1, -1$ , 当  $k$  是偶数时为  $k, -k, 0$ .

## 参考文献

- [1] Biggs N. Algebraic Graph Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1974.
- [2] Godsil C, Royle G. Algebraic Graph Theory [M]. Berlin: Springer, 2001.
- [3] Cvetkocic D, Doob M, Sachs H. Spectra of Graph-Theory and Applications [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [4] Doob M, Gutman I, Cvetkovic D, Torgasev A. Recent results in the graph of spectra [M]. Amsterdam: North Holland, 1988.
- [5] Delorme C, Tillich J P. The spectrum of de Bruijn and Kautz graphs Europ [J]. JCombin, 1998, 19: 307-319.
- [6] Harutyunyan H A, Morosan C D. The spectra of Knodel graphs [J]. Information, 2006, 30: 295-299.
- [7] Saldanha N C, Tomei C. Spectra of regular polytopes [J]. Discrete Comput Geom, 1992, 7: 403-414.
- [8] Mohar B, Behruz T R. Median eigenvalues of bipartite graphs [J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 2015, 41: 899-909.
- [9] Chen Y F, Fu H L, Kim I J, Stehr E, Watts B, On the largest eigenvalues of bipartite graphs which are nearly complete [J]. Linear Algebra and its Applications, 2010, 432: 606-614.
- [10] Ghorbani E. Bipartite graphs with five eigenvalues and pseudo designs [J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 2012, 36:209-221.
- [11] Koledina T, Stanić Z. Regular bipartite graphs with three distinct non-negative eigenvalues [J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 438: 3336-3349.
- [12] Petersdorf M, Sachs H. Spektrum und Automorphismengruppe eines Graphen, Combinatorial theory and its applications, III [M]. Amsterdam: North-Holland, 1969: 891-907.

- [13] 张蕾, 王燕, 杨玉军, 凯莱图的单特征值 [J]. 烟台大学学报, 2020, 33(1): 1-5.  
[14] 王燕. 具有两个单特征值的循环图 [J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(19): 158-162.  
[15] 程汉波. 有理度数的三角函数值何时为有理数及其应用 [J]. 数学通讯, 2014, 12(2): 58-60.

## Simple Eigenvalues of Bipartite Graphs

WANG Yan, LI Jia-hao, LI Qing-hua

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

**Abstract:** The eigenvalues of a graph are usually referred to the eigenvalues of its adjacent matrix. Among all the eigenvalues, the simple eigenvalues (eigenvalues with multiplicity 1) are especially important. In lack of no general methods, it is quite difficult to determine the simple eigenvalues of a graph. In 1969, Petersdorf and Sachs gave a scope of the possible simple eigenvalues of a vertex-transitive graph. But, to find out which one is indeed simple among the possible values still depends on the graph itself. In this paper, we give a class of bipartite graphs which are also Cayley graphs of dihedral groups. Apart from the degrees and minus degrees of these graphs, the other simple eigenvalues are 0 or  $\pm 1$  that are exactly the “median” values in the scope given by Petersdorf and Sachs.

**Keywords:** bipartite graph; cayley graph; eigenvalue