2014,**34A**(2):409–418

数学物理学报 Acta Mathematica Scientia

http://actams.wipm.ac.cn

一类带有趋化性扩散的细菌模型一致有界解的整体存在性 *

[1] 曲风龙　[2] 王玉泉

([1] 烟台大学数学与信息科学学院　山东烟台 264005; [2] 首都师范大学数学科学学院　北京 100037)

摘要：考虑二维空间中一类带有趋化性扩散的生物模型的一致有界解的整体存在性. 利用细致的能量估计、不同希尔伯特空间 (包括 $V_2(Q_{t,t+1})$ 、 $W^{1,2}_{p,p}(Q_{t,t+1})$ 、 $L_{p,q}(Q_{t,t+1})$) 的先验估计以及一致 Gronwall 不等式, 证明了一类带有出生率和死亡率项的生物模型的一致有界解的整体存在性.

关键词：趋化性；整体存在性；一致有界性.

MR(2000) 主题分类：35K50; 35K57; 35K60　**中图分类号**：O175.29　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2014)02-409-10

1　引言

趋化性扩散在许多实际现象中经常出现，例如：伤口愈合、癌变、由细菌感染形成的白细胞聚集等 (参考文献 [1]). 经典的趋化性扩散的模型 Keller-Segel 模型 (参考文献 [2]) 近些年吸引了众多学者的兴趣并得到了广泛的研究. 带有趋化性扩散的广义形式的 Keller-Segel 模型可由如下的初边值方程组描述.

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \nabla\cdot(f(u)\nabla\chi(v)) + F(u,v), & (t,x)\in(0,T)\times\Omega,\\ v_t = d\triangle v + G(u,v), & (t,x)\in(0,T)\times\Omega,\\ u|_{t=0}=u_0,\quad v|_{t=0}=v_0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0, \dfrac{\partial v}{\partial n}=0, & (t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 $u(t,x)$ 表示一种生物的密度， $v(t,x)$ 表示化学吸引物的密度， $f(u)$ 和 $\chi(v)$ 称为趋化性敏感度函数.

方程组 (1.1) 解的局部存在性已经有较多的结论了. 当函数 $f(u)\in C^{1+\theta}[0,\infty)$, $\chi(v)\in C^{2+\theta}[0,\infty)$, $\theta>0$ 时，由 Amann[3] 的局部存在性理论知，对任意非负的初值函数 $u_0, v_0\in$

收稿日期: 2012-06-17; 修订日期: 2013-10-21

E-mail: fenglongqu@amss.ac.cn;wyq816@163.com

* 基金项目：国家自然科学基金 (10671131, 11201402, 11201266) 、北京自然科学基金 (1092006) 和天元基金 (11026098, 11026150) 资助

$W_q^1(\Omega)$, $q>n$, 方程组 (1.1) 都存在唯一的局部古典解. 当 $f(u)\in C^{1+\theta}[0,\infty)$, $\theta>0$, 并且 $\chi(v)=v$ 时, 对任意非负初值 $u_0\in C(\bar{\Omega}), v_0\in W_q^1(\Omega)$, $q>n$, 文献 [4] 证明了方程组 (1.1) 存在唯一的局部古典解. 当 $n=2, f(u)=u$, $\chi(v)$ 在零点有奇性时, 对任意非负初值 $u_0\in L_2(\Omega), v_0\in H^{1+\varepsilon_0}(\Omega)$, 方程组 (1.1) 古典解的局部存在性在文献 [5] 中得到证明. 最近, 对于拟线性性更强的方程组

$$u_t=\nabla\cdot(d_1\nabla u-\overrightarrow{P}(u,v,\nabla v))+f(u,v),\quad v_t=d_2\triangle v+g(u,v),$$

对于任意的 $u_0\in C(\bar{\Omega})$, $v_0\in W_p^{1+\sigma}(\Omega),\sigma>n/p,p>n$, 文献 [6] 证明了其弱解的局部存在性, 特别, 当 $\overrightarrow{P}(u,v,\nabla v)$ 是 u 的线性函数或者 $u_0\in W_p^{1+\sigma}(\Omega),\sigma>n/p,p>n$ 时, 方程组存在唯一的局部古典解. 进一步, 对于特殊情形

$$\overrightarrow{P}(u,v,\nabla v)=u\chi(v)\nabla v,$$

文献 [6] 证明了当 $u_0\in C(\bar{\Omega})$, $v_0\in W_p^1(\Omega),p>n$ 时, 对应的方程组的局部古典解存在唯一.

方程组 (1.1) 解的整体存在性结论目前尚且不多, 对于一些特殊情形有较多结论. 当 $n=1$, $f(u)=u,\chi(v)=v$, $F(u,v)=(kf_1(v)-\theta)u$ 时, 文献 [7] 在初边值的一定假设下, 利用 Moser-Alikakos 迭代的方法证明了一致有界解的整体存在性. 基于文献 [7] 的方法, 文献 [8] 讨论了两种生物共同竞争同一种食物的具有三个方程的竞争模型解的整体存在性. 对于 $n=1, f(u)=u,\chi(v)=\log v, F(u,v)=0$, $d=0, G(u,v)=-\alpha v+\beta u$ 的情形, 文献 [9–10] 讨论了对应的方程组解的爆破性和整体存在性.

对于 $n=1,2, f(u)=u,\chi(v)=v, F(u,v)=g(u)$, 第二个方程为 $0=\triangle v-v+u$ 的情形, 其有界解的整体存在性在文献 [11] 中得到证明, 文章进一步研究了函数 $g(u)$ 不同条件下解的整体存在性.

对于 $n=2, f(u)=u, F(u,v)=u(M-u), G(u,v)=-cv+du, M\in R, c,d>0$, $\chi(v)$ 的导数有界 (例如: $\chi(v)=\kappa v$ 或者 $\chi(v)=\kappa\log(1+v),\kappa>0$) 的情形, 对于任意非负初值 $u_0\in L_2(\Omega), v_0\in H^{1+\varepsilon_0}(\Omega)$, 方程组 (1.1) 解的整体存在性在文献 [12] 中得到证明. 对于 $n=2, f(u)=u, F(u,v)=u(1-u), G(u,v)=-cv+du$, $\chi(v)$ 在 $v=0$ 有奇性 (例如: $\chi(v)=\log v$ 或者 $-\frac{1}{v}$) 时, 对于任意非负初值 $u_0\in L_2(\Omega), v_0\in H^{1+\varepsilon_0}(\Omega)$, 文献 [5] 证明了方程组 (1.1) 解的整体存在性.

当 $n\ge 1, F(u,v)=0, G(u,v)=u, |f(u)|\le c(1+u)^\alpha, 0<\alpha<\frac{2}{n}$ 时, 对于任意非负的 $u_0\in C(\bar{\Omega}), v_0\in W_p^\sigma(\Omega)$, 方程组 (1.1) 解的整体存在性在文献 [4] 中得到证明.

对于 $n=2,3, f(u)=u,\chi(v)=v, F(u,v)=u(1-u^l), G(u,v)=-v+au$ 的情形, 利用细致的能量估计, 特殊的内差不等式及一致 Gronwall 不等式, 文献 [13] 证明了程组 (1.1) 一致有界解的整体存在性. 进一步, 利用解析半群理论及特殊的迭代技巧, 文献 [13] 在 $f(u)$, $g(u)\in \mathrm{C}^1([0,\infty))$, $|f(u)|\le\chi(1+u)^\alpha$, $|g(u)|\le k(1+u)^\beta$ 及 α,β 不同取值范围的假设下, 证明了方程组 (1.1) 一致有界解的整体存在性.

对于带有趋化性扩散的癌变模型, 文献 [14–16] 讨论了该模型在方程组参数的不同条件下一致有界解的整体存在性, 对于更多带有趋化性扩散模型解的整体存在性问题, 可参考文献 [17–20] 及其中的参考文献.

自从 Keller 和 Segel 研究了经典的带有趋化性扩散的生物模型, 大量的带有趋化性扩散的模型吸引了众多学者的研究分析. 其中 Buderne 和 Berg 在文献 [21] 中介绍了一种称为 coli 的生物模型, 通过大量的试验分析, 最终 Murray 在文献 [22] 中提出了如下的描述该模

型的方程组

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \nabla \cdot (\dfrac{u}{(1+v)^2}\nabla v) + u(\dfrac{w^2}{1+w^2} - u), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v_t = \triangle v + \dfrac{wu^2}{1+u^2} - uv, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ w_t = \triangle w - \dfrac{uw^2}{1+w^2}, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), w(x,0) = w_0(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个带有光滑边界的有界区域，$u(t,x), v(t,x), w(t,x)$ 分别是细菌的密度，趋化性吸引物的浓度和营养物的浓度．$u(\frac{w^2}{1+w^2} - u)$ 是细菌的增殖项，$\frac{wu^2}{1+u^2}$ 和 $\frac{uw^2}{1+w^2}$ 分别是趋化性吸引物的增长项和营养物的消费项.

本文利用细致的能量估计及内差不等式，对于任意非负初值 $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $v_0 \in W_p^1(\Omega)$, $w_0 \in W_p^1(\Omega), p > n$, 证明了方程组 (1.2) 的一致有界解是整体存在的.

本文的主要结论如下.

定理 1　假设 $p > 2$, 则对任意非负初值 $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $v_0 \in W_p^1(\Omega)$, $w_0 \in W_p^1(\Omega)$, 方程组 (1.2) 的一致有界解是整体存在的，并且有如下估计

$$\|u(t,x)\|_{L_\infty(\Omega)} + \|v(t,x)\|_{W_p^1(\Omega)} + \|w(t,x)\|_{W_p^1(\Omega)} \le C_*, \forall t \ge 0, \tag{1.3}$$

其中 C_* 依赖于 $\|u_0\|_{C(\bar{\Omega})}, \|v_0\|_{W_p^1(\Omega)}, \|w_0\|_{W_p^1(\Omega)}$.

本文安排如下：第二节介绍本文用到的基本结论和方程组 (1.2) 的局部存在性结论；第三节给出定理 1 的具体证明.

2　基本结论和局部存在性

本节我们首先介绍本文常用的几个与时间、空间相关的巴拿赫空间. 记 $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $Q_{t_1,t_2} = (t_1,t_2) \times \Omega$, 我们可定义如下几个空间.

定义 2.1　对每个固定的 $p, q \ge 1, 0 \le t_1 < t_2$ 定义

$$\|u\|_{L_{p,q}(Q_{t_1,t_2})} \triangleq \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u(t,x)\|_{L_q(\Omega)}^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \quad 对\ 1 \le p < \infty, 1 \le q \le \infty;$$

$$\|u\|_{L_{\infty,q}(Q_{t_1,t_2})} \triangleq \operatorname{ess}\sup_{t_1<t<t_2} \|u(t,x)\|_{L_q(\Omega)} \quad 对\ 1 \le q \le \infty;$$

$$\|u\|_{W_{p,p}^{1,2}(Q_{t_1,t_2})} \triangleq \left\{\sum_{2i+j=0}^{2} \|D_t^i D_x^j u\|_{L_{p,p}(Q_{t_1,t_2})}^p\right\}^{1/p} \quad 对\ 1 \le p < \infty;$$

$$\|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})} \triangleq \left\{\operatorname{ess}\sup_{t_1<t<t_2} \|u(t,x)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t,x)\|_{L_{2,2}(Q_{t_1,t_2})}^2\right\}^{1/2}.$$

由嵌入定理 (参考文献 [23]), 我们有

$$\|u\|_{L_{q,r}(Q_{t_1,t_2})} \le C\|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})},\ 对\ \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4},\quad r \in [2,\infty], q \in [2,\infty),$$

其中 C 只依赖于 q, r, Ω 和 $t_2 - t_1$.

引理 2.2[24] (Gagliardo-Nirenberg 内差不等式) (参考文献 [24] 第十章第一节，定理 I) 对任意 $u \in W_q^1(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \le C\|u\|_{W_q^1(\Omega)}^a \|u\|_{L_r(\Omega)}^{1-a},$$

其中 $a = \frac{\frac{n}{r} - \frac{n}{p}}{1 - \frac{n}{q} + \frac{n}{r}} \in [0,1]$, 并且 $p, q, r \geqslant 1$ 满足 $p(n-q) \le nq$, $1 \le r \le p$.

引理 2.3[4] 设 $1 < p < \infty$, 令 $A := A_p$ 表示如下定义的扇形算子

$$A_p u = -\triangle u, \quad 对\ u \in D(A_p) = \left\{\phi \in W^{2,p}(\Omega) \mid \left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

由算子 $A + I$ 产生的分数算子 $(A+I)^\beta, \beta \geqslant 0$, 其值域 $D((A+I)^\beta)$ 有如下性质

$$D((A+I)^\beta) \hookrightarrow W_p^1(\Omega), \qquad \beta > \frac{1}{2},$$

并且，对每个固定的 $\alpha \ge 0$, $1 \le r \le p$, 存在常数 $C(\alpha, r, p)$ 使得

$$\|(A+I)^\alpha \mathrm{e}^{-(A+I)t}\, v\|_{L_p(\Omega)} \le C(\alpha, r, p) t^{-[\alpha + \frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})]} \mathrm{e}^{-\mu t} \|v\|_{L_r(\Omega)}, \tag{2.1}$$

其中 $v \in L_r(\Omega)$, $t > 0$, $\mu \in (0,1)$.

引理 2.4[6] (古典解的局部存在性) 设 $p > n$, 则对任意非负初值 $u_0 \in C(\bar\Omega)$, $v_0 \in W_p^1(\Omega)$, $w_0 \in W_p^1(\Omega)$, 方程组 (1.2) 在区间 $[0, T_{\max})$ 上存在唯一的古典解 $(u(t,x), v(t,x), w(t,x))$, 并且

$$u(t,x) \in C([0,T_{\max}), C(\bar\Omega)) \cap C^{1,2}((0,T_{\max}) \times \bar\Omega),$$
$$v(t,x) \in C([0,T_{\max}) \times W_p^1(\Omega)) \cap C^{1,2}((0,T_{\max}) \times \bar\Omega),$$
$$w(t,x) \in C([0,T_{\max}) \times W_p^1(\Omega)) \cap C^{1,2}((0,T_{\max}) \times \bar\Omega),$$

其中 $T_{\max}$ 依赖于 n, Ω, $\|u_0\|_{C(\bar\Omega)}$, $\|v_0\|_{W_p^1(\Omega)}$, $\|w_0\|_{W_p^1(\Omega)}$.

进一步，若 $T_{\max} < \infty$, 则

$$\sup_{t \uparrow T_{\max}} \{\|u(t,x)\|_{L_\infty(\Omega)} + \|v(t,x)\|_{W_p^1(\Omega)} + \|w(t,x)\|_{W_p^1(\Omega)}\} = \infty.$$

注 引理 2.4 是参考文献 [6] 中广义拟线性方程组的一种特殊情形.

引理 2.5 设 $n \ge 2$, 令 $(u(t,x), v(t,x), w(t,x))$ 是方程组 (1.2) 定义在 $[t_0, T_{\max})$, $t_0 \in (0, T_{\max})$ 的古典解，假设存在不依赖于 t 和 $T_{\max}$ 的常数 C_1, 使得 $\|u(t,x)\|_{L_r(\Omega)} \le C_1$, 其中 $1 \le r < n$, 则对初值 $u(t_0,\cdot)$, $v(t_0,\cdot)$, $w(t_0,\cdot)$, 我们有

$$\|v(t,x)\|_{W_q^1(\Omega)} \le C_q, \quad \forall t \in [t_0, T_{\max}),\ 1 < q < \frac{nr}{n-r}, \quad 1 \le r < n, \tag{2.2}$$

$$\|w(t,x)\|_{W_q^1(\Omega)} \le C_q, \quad \forall t \in [t_0, T_{\max}),\ 1 < q < \frac{nr}{n-r}, \quad 1 \le r < n, \tag{2.3}$$

其中 $C_q > 0$ 是不依赖于 t 和 $T_{\max}$ 的常数.

证 方程组 (1.2) 中的 w 方程满足如下的积分形式

$$w(t,x) = \mathrm{e}^{-(A+I)t} w(t_0,\cdot) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-(A+I)(t-s)}\left(\frac{uw^2}{1+w^2} + w\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $A=-\triangle$. 对任意 $q>1$, $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$, 我们得到如下估计

$$\begin{aligned}
&\|(A+I)^{\alpha}w(t,x)\|_{L_q(\Omega)}\\
\le&\|\mathrm{e}^{-(A+I)t}w(t_0,\cdot)\|_{W_q^1(\Omega)}+C\int_{t_0}^{t}\|(A+I)^{\alpha}\mathrm{e}^{-(A+I)(t-s)}(\frac{uw^2}{1+w^2}+w)(s,x)\|_{L_q(\Omega)}\mathrm{d}s\\
\le&C\|w(t_0,\cdot)\|_{W_q^1(\Omega)}+C\int_{t_0}^{t}\|(t-s)^{-[\alpha+\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})]}\mathrm{e}^{-\mu(t-s)}(\frac{uw^2}{1+w^2}+w)(s,x)\|_{L_r(\Omega)}\mathrm{d}s\\
\le&C\|w(t_0,\cdot)\|_{W_q^1(\Omega)}+\sup_{t_0\le t<T}(\|u(t,x)\|_{L_r(\Omega)}+\|w(t,x)\|_{L_r(\Omega)})C\int_{t_0}^{t}\tau^{-\theta}\mathrm{e}^{-\mu\tau}\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

其中 $\tau=t-s$, $\theta=\alpha+\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})$.

对每个固定 $1<q<\frac{nr}{n-r}$, 我们选取 $\alpha>\frac{1}{2}$, 使得 $\theta<1$, 于是对方程组 (1.2) 的第三个方程利用比较原理知， $\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C$, 从而由命题 2.3 知

$$\sup_{t_0\le t<T}\|w(t,x)\|_{W_q^1(\Omega)}\le C_q,$$

这就证明了 (2.3) 式.

对方程组 (1.2) 的第二个方程利用比较原理得 $\|v(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C$, 因此由 (2.3) 式和类似于证明 (2.3) 式的讨论，我们可以证明 (2.2) 式. ▌

3 定理 1 的证明

本节，利用细致的能量估计，特殊的内差不等式以及一致 Gronwall 不等式，我们将证明方程组 (1.2) 在二维空间中一致有界解的整体存在性.

命题 3.1[25] (一致 Gronwall 不等式) (参考文献 [25] 第三章引理 1.1) 设定义在 $[t_0,\infty)$ 上的正的 Lipschitz 函数 $y(t),h(t),g(t)$ 满足

$$y'(t)\le g(t)y(t)+h(t),$$

$$\int_t^{t+r}g(s)\mathrm{d}s\le a_1,\quad \int_t^{t+r}h(s)\mathrm{d}s\le a_2,\quad \int_t^{t+r}y(s)\mathrm{d}s\le a_3,\ \forall t\ge t_0,$$

其中 r,a_1,a_2,a_3 是四个正常数. 则我们有如下结论

$$y(t+r)\le(\frac{a_3}{r}+a_2)\mathrm{e}^{a_1},\quad \forall t\ge t_0.$$

下面我们将证明不等式 (1.3) 式对任意的非负初值 (u_0,v_0,w_0) 都成立，并且 (1.3) 式中的常数 C 不依赖于时间 t.

引理 3.1 对任意的非负初值 (u_0,v_0,w_0), 都存在正常数 C 使得方程组 (1.2) 的解 $(u(t,x),v(t,x),w(t,x))$ 满足

$$u(t,x)\ge0,\ v(t,x)\ge0,\ w(t,x)\ge0,\ \ \forall t\ge0,\ \ x\in\bar{\Omega},\tag{3.1}$$

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C,\ \|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C,\tag{3.2}$$

$$\int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x\le C,\quad \forall t\ge0,\tag{3.3}$$

$$\int_t^{t+1}\int_\Omega u^2(s,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \le C, \quad \forall t\ge 0. \tag{3.4}$$

证 对方程组 (1.2) 的三个方程分别利用比较原理得，(3.1) 式和 (3.2) 式是成立的. 对任意 $t>0$, 对方程组 (1.2) 的第一方程在区域 Ω 上积分有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x \le \int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u^2(t,x)\mathrm{d}x \le \int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x - \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

因此,

$$\int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x \le \max\{\|u_0\|_{L_1(\Omega)},\ |\Omega|\},\ \ \forall t\ge 0. \tag{3.5}$$

对任意 $t\ge 0$, 对方程组 (1.2) 的第一方程在 $[t,t+1]\times\Omega$ 上积分得

$$\int_t^{t+1}\int_\Omega u^2(s,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \le \int_t^{t+1}\int_\Omega u(s,x)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u(t+1,x)\mathrm{d}x.$$

将 (3.5) 式的结论代入上式可以证明 (3.4) 式. ▌

引理 3.2 对 $n=2$, 如下结论成立

$$\|w(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})} \le C, \quad \|\nabla w(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})} \le C, \quad \forall t\ge 0. \tag{3.6}$$

证 对方程组 (1.2) 的第三个方程乘以 w, 然后在区域 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla w|^2\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\frac{w^3}{1+w^2}\mathrm{d}x \le C, \tag{3.7}$$

对 (3.7) 式在区间 $[t,t+1]$ 上积分, 然后利用一致 Gronwall 不等式可以证明 $\|w\|_{V_2(Q_{t,t+1})}\le C$.

现在对方程组 (1.2) 的第三个方程乘以 $-\triangle w$, 然后在区域 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla w|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\triangle w|^2\mathrm{d}x \le \int_\Omega |\triangle w\frac{uw^2}{1+w^2}|\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\|\triangle w\|^2_{L_2(\Omega)} + C\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{3.8}$$

由 (3.8) 式，我们可以得到如下不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla w|^2\mathrm{d}x \le C\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{3.9}$$

对 (3.9) 式两端在区间 $[t,t+1]$ 上积分，由引理 3.1 知 $\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x\le C$, 代入 (3.8) 式，然后利用一致 Gronwall 不等式得 (3.6) 式成立. ▌

引理 3.3 对 $n=2$, 我们有

$$\|v(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})} \le C, \quad \|\nabla v(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})} \le C, \quad \forall t\ge 0. \tag{3.10}$$

证 类似于引理 3.2 的证明，我们可以证明估计 (3.10) 式成立. ▌

引理 3.4 对 $n=2$, $u(t,x)$ 满足

$$\|u(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})} \le C, \quad \forall t\ge 0. \tag{3.11}$$

证 对方程组 (1.2) 的第一个方程乘以 u, 然后在区域 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x + \int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{u\nabla u\cdot\nabla v}{(1+v)^2}\mathrm{d}x + \int_\Omega\frac{u^2w^2}{1+w^2}\mathrm{d}x - \int_\Omega u^3\mathrm{d}x\\ &\le C\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_4(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}\\ &\le \varepsilon\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + C\|u\|^2_{L_4(\Omega)}\|\nabla v\|^2_{L_4(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

利用二维空间的 Gagliardo-Nirenberg 不等式得

$$\|u\|^2_{L_4(\Omega)} \le C\|u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{W^1_2(\Omega)} \le C\|u\|_{L_2(\Omega)}(\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}).$$

代入到 (3.12) 式，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x \le 2\varepsilon\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + C(1+\|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)})\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{3.13}$$

注意到 $V_2(Q_{(t,t+1)}) \hookrightarrow L_{4,4}(Q_{(t,t+1)})$, 由引理 3.1 、引理 3.3 以及对 (3.13) 式运用一致 Gronwall 不等式得 (3.11) 式成立. ▌

由引理 3.4 以及 $V_2(Q_{(t,t+1)}) \hookrightarrow L_{4,4}(Q_{(t,t+1)})$, 我们可以对方程组 (1.2) 的第二个方程、第三个方程分别利用 $W^{1,2}_{p,p}$ 估计得

$$\|v\|_{W^{1,2}_{4,4}(Q_{t,t+1})} \le C, \qquad \|w\|_{W^{1,2}_{4,4}(Q_{t,t+1})} \le C, \quad \forall t \ge 1. \tag{3.14}$$

引理 3.5　对 $n=2$, $u(t,x)$ 满足

$$\|\nabla u(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})} \le C, \qquad \forall t \ge 0. \tag{3.15}$$

证　我们首先证明 $|\nabla v|^2 \in V_2(Q_{t,t+1}), \quad \forall t \ge 0$.

对方程组 (1.2) 的第二个方程乘以 $-|\nabla v|^2\triangle v$, 然后在区域 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla v|^4\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla v|^2|\triangle v|^2\mathrm{d}x\\
&\le C\|\nabla v\triangle v\|_{L_2(\Omega)}\|v_t\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_4(\Omega)} + C\|\nabla v\|^2_{L_4(\Omega)}\|\triangle v\|_{L_2(\Omega)}\\
&\quad + C\|u\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla v\triangle v\|_{L_2(\Omega)}\\
&\le \varepsilon\|\nabla v\triangle v\|^2_{L_2(\Omega)} + C(\|v_t\|^4_{L_4(\Omega)} + \|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)} + \|u\|^4_{L_4(\Omega)} + 1).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

由引理 3.3 、 3.4 、 (3.14) 式及一致 Gronwall 不等式可以证明 $|\nabla v|^2 \in V_2(Q_{t,t+1})$, $\forall t \ge 0$, 因此有 $\|\nabla v\|_{L_{8,8}(Q_{t,t+1})} \le C$.

下面我们证明 $\|\nabla u(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})} \le C, \quad \forall t \ge 0$.

对方程组 (1.2) 的第一个方程乘以 $-\triangle u$, 然后在区域 Ω 上积分，我们可以得到如下估计

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\triangle u|^2\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega \frac{\triangle u\nabla u\cdot\nabla v}{(1+v)^2}\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{u\triangle u\nabla^2 v}{(1+v)^2}\mathrm{d}x - 2\int_\Omega \frac{\triangle uu|\nabla v|^2}{(1+v)^3}\mathrm{d}x - \int_\Omega \triangle uu(\frac{w^2}{1+w^2} - u)\mathrm{d}x\\
&\le C\|\triangle u\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_4(\Omega)} + C\|\triangle u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_4(\Omega)}\|\triangle v\|_{L_4(\Omega)}\\
&\quad + C\|\triangle u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla v\|^2_{L_8(\Omega)} + C\|\triangle u\|_{L_2(\Omega)}(\|u\|^2_{L_4(\Omega)} + 1)\\
&\le \varepsilon_1\|\triangle u\|^2_{L_2(\Omega)} + C\|\nabla u\|^2_{L_4(\Omega)}\|\nabla v\|^2_{L_4(\Omega)} + C(\|u\|^4_{L_4(\Omega)} + \|\triangle v\|^4_{L_4(\Omega)} + \|\nabla v\|^8_{L_8(\Omega)} + 1).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 和 Young 不等式，得

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2_{L_4(\Omega)}\|\nabla v\|^2_{L_4(\Omega)} &\le \|\nabla u\|_{W^1_2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|^2_{L_4(\Omega)}\\
&\le \varepsilon_2\|\nabla u\|^2_{W^1_2(\Omega)} + C\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)}\\
&\le \varepsilon_2\|\triangle u\|^2_{L_2(\Omega)} + C\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}(\|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)} + 1).
\end{aligned}$$

将上式代入到 (3.17) 式，取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 充分小使得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\triangle u|^2\mathrm{d}x\\ &\leq C\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}(\|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)}+1)+C(\|u\|^4_{L_4(\Omega)}+\|\triangle v\|^4_{L_4(\Omega)}+\|\nabla v\|^8_{L_8(\Omega)}+1).\end{aligned}\tag{3.18}$$

由 (3.14) 式得 $\|\nabla v\|_{L_{8,8}(Q_{t,t+1})}\leq C$, 从而由引理 3.3 、 3.4 及对 (3.18) 式运用一致 Gronwall 不等式可以证明 (3.15) 式成立．这就证明了引理 3.5. ▍

由引理 3.5 知 $u(t,x)\in W_2^1(\Omega)$, 进一步由二维空间中的嵌入不等式 $W_2^1(\Omega)\hookrightarrow L_p(\Omega)$, $1\leq p<\infty$ 及对方程组 (1.2) 中第二、三个方程分别利用 $W^{1,2}_{p,p}$ 内估计得

$$\|v\|_{W^{1,2}_{p,p}(Q_{t,t+1})}\leq C,\qquad \|w\|_{W^{1,2}_{p,p}(Q_{t,t+1})}\leq C,\ \ 1\leq p<\infty,\ \forall t\geq 1.\tag{3.19}$$

由方程组 (1.2) 中的 v 方程知

$$\nabla v_t-\triangle(\nabla v)=\frac{u^2\nabla w}{1+u^2}+\frac{2wu\nabla u}{(1+u^2)^2}-\nabla uv-u\nabla v\in L_{p,p}(\Omega),\ 1\leq p<4,$$

因此，由 $W^{1,2}_{p,p}$ 内估计得

$$\|\nabla v\|_{W^{1,2}_{p,p}(Q_{t,t+1})}\leq C,\ \ 1\leq p<4,\ \ \forall t\geq 1.\tag{3.20}$$

同理，对方程组 (1.2) 中的 u 方程有如下估计 $\|u_t\|_{L_{2,2}(Q_{t,t+1})}\leq C,\ \forall t\geq 0.$

引理 3.6 对 $n=2$, $u_t(t,x)$ 满足

$$\|u_t(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})}\leq C,\qquad \forall t\geq 0.\tag{3.21}$$

证 对方程组 (1.2) 中的 u 方程两边关于时间 t 求微分得

$$u_{tt}=\triangle u_t-\nabla(\frac{u}{(1+v)^2}\nabla v)_t+\frac{u_tw^2}{1+w^2}+\frac{2uww_t}{(1+w^2)^2}-2uu_t.$$

对上式两边乘以 u_t, 然后在区域 Ω 上积分，由 Gagliardo-Nirenberg 不等式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_t^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u_t|^2\mathrm{d}x\\ &=\int_\Omega\frac{u_t\nabla u_t\cdot\nabla v}{(1+v)^2}\mathrm{d}x-2\int_\Omega\frac{uv_t\nabla u_t\cdot\nabla v}{(1+v)^3}\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{u\nabla u_t\cdot\nabla v_t}{(1+v)^2}\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_\Omega\frac{u_t^2w^2}{1+w^2}+2\frac{uu_tww_t}{(1+w^2)^2}-2uu_t\mathrm{d}x\\ &\leq\|u_t\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla u_t\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_4(\Omega)}+2\|u\|_{L_6(\Omega)}\|v_t\|_{L_6(\Omega)}\|\nabla u_t\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_6(\Omega)}\\ &\quad+\|u\|_{L_6(\Omega)}\|\nabla u_t\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla v_t\|_{L_3(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}+2\|u\|_{L_4(\Omega)}\|u_t\|_{L_2(\Omega)}\|w_t\|_{L_4(\Omega)}\\ &\quad+2\|u\|_{L_2(\Omega)}\|u_t\|_{L_2(\Omega)}\\ &\leq\varepsilon\|\nabla u_t\|^2_{L_2(\Omega)}+C\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}(\|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)}+1)\\ &\quad+C(\|u\|^6_{L_6(\Omega)}+\|v_t\|^6_{L_6(\Omega)}+\|w_t\|^4_{L_4(\Omega)}+\|\nabla v\|^6_{L_6(\Omega)}+\|\nabla v_t\|^3_{L_3(\Omega)}+1).\end{aligned}\tag{3.22}$$

注意到 $\|u_t\|_{L_{2,2}(Q_{t,t+1})}\leq C$, 于是由 (3.19) 式， (3.20) 式，引理 3.5 及类似于引理 3.5 的证明，我们得到如下估计

$$\|u_t(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})}\leq C,\qquad \forall t\geq 0.$$

这就证明了引理 3.6. ▌

引理 3.7 对 $n=2$, $v(t,x)$ 满足

$$\|v_t(t,x)\|_{V_2(Q_{t,t+1})} \le C, \qquad \forall t \ge 0. \tag{3.23}$$

证 类似于引理 3.6 的证明，我们可以证明估计式 (3.23) 式成立. ▌

定理 1 的证明 由引理 3.7 得 $\|v_t\|_{L_2(\Omega)} \le C$, 再由引理 3.1 、 3.2 及方程组 (1.2) 中的 v 方程容易得到 $\|\triangle v\|_{L_2(\Omega)} \le C$, $\forall t \ge 0$. 又因为方程组 (1.2) 中的 u 方程可改写为如下形式

$$\triangle u = u_t - \nabla(\frac{u}{(1+v)^2}\nabla v) + u(\frac{w^2}{1+w^2} - u) \triangleq F(u,v,w),$$

因此，由引理 3.2 、 3.6 及 $\|\triangle v\|_{L_2(\Omega)} \le C$, $\forall t \ge 0$ 知 $F(u,v,w) \in L_\alpha(\Omega)$, $1<\alpha<2$, 从而有 $\triangle u \in L_\alpha(\Omega)$. 对任意的 $p>2$, 存在 $1<\alpha<2$ 使得 $\frac{1}{p} > \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}$, 于是 $W_\alpha^2(\Omega) \hookrightarrow W_p^1(\Omega)$, 该嵌入结论联合引理 2.3 、 3.1 得到估计式 (1.3) 式是成立的. 这就证明了定理 1. ▌

参 考 文 献

[1] Lauffenburger D A, Kennedy C R. Localised bacterial infection in a distributed model for tissue inflammation. Journal of Mathematical Biology, 1983, **16**: 141–163

[2] Keller E F, Segel L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. Journal of Theoretical Biology, 1970, **26**: 399–415

[3] Amann H. Dynamic theory of quasilinear parabolic equations II: Reaction-diffusion systems. Differential Integral Equations, 1990, **3**: 13–75

[4] Horstmann D, Winkler M. Boundedness vs blow-up in a chemotaxis system. Journal of Differential Equations, 2005, **215**: 52–107

[5] Aida M, Osaki K, Tsujikawa T, et al. Chemotaxis and growth system with singular sensitivity function. Nonlinear Analysis, 2005, **6**: 323–336

[6] Chertock A, Kurganov A, Wang X F, et al. On a chemotaxis model with saturated chemotactic flux. Kinetic and Related Models, 2012, **5**: 51–95

[7] Wang X F. Qualitative behavior of solutions of chemotactic diffusion system. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2000, **31**: 535–560

[8] Wang X F, Wu Y P. Qualitative analysis on a chemotactic diffusion model for two species competion for a limited resource. Quarterly of Applied Mathematics, 2002: 505–531

[9] Levine H A, Sleeman B D. A system of reaction difusion equations arising in the theory of reinforced random walks. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1997, **57**: 683–730

[10] Yang Y, Chen H, Liu W. On existence of global solutions and blow-up to a system of the reaction-diffusion equations modelling chemotaxis. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2001, **33**: 763–785

[11] Tello J, Winkler M. A chemotaxis system with logistic source. Communications in Partial Differential Equations, 2007, **32**: 849–877

[12] Osaki K, Tsujikawa T, Yagi A, et al. Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations. Nonlinear Analysis, 2002, **51**: 119–144

[13] Qu F L, Wu Y P. The global existence of solutions for two classes of chemotaxis models. (Submitted)

[14] Tao Y S, Wang M. Global solution for a chemotactic-haptotactic model of cancer invasion. Nonlinearity, 2008, **21**: 2221–2238

[15] Tao Y S. Global existence of classical solutions to a combined chemotaxis-haptotaxis model with logistic source. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, **354**: 60–69

[16] Tao Y S. Global existence for a haptotaxis model of cancer invasion with tissue remodeling. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, **12**: 418–435

[17] Gabriela L, Cristian M R. Global solutions and asymptotic behavior for a parabolic degenerate coupled system arising from biology. Nonlinear Analysis, 2010, **72**: 77–98

[18] Lou Y, Ni W M, Wu Y P. On the global existence of a cross-diffusion system. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 1998, **4**: 193–203

[19] Zhai Z C. Global well-posedness for nonlocal fractional Keller-Segel systems in critical Besov spaces. Nonlinear Analysis, 2010, **72**: 3173–3189

[20] Wrzosek D. Model of chemotaxis with threshold density and singular diffusion. Nonlinear Analysis, 2010, **73**: 338–349

[21] Budrene E O, Berg H C. Complex patterns formed by motile cells of escherichia coli naturem. 1991, **394**: 630–633

[22] Murray J D. Mathematical Biology, II, volume 18 of Interdisciplinary Applied Mathematics (third edition). Berlin: Springer Verlag, 2003

[23] Ladyzhenskaja O A, Solonnikov V A, Uralceva N N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translation of Mathematical Monographys, Vol 23. Providence, RI: American Methematical Society, 1968

[24] Friedman A. Partial Differential Equations. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1969

[25] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems on Mechanics and Physics. New York: Springer Verlag, 1998

The Interior Transmission Problem for Isotropic Maxwell Equations and Some Estimates on the Index of Refraction

[1]Qu Fenglong [2]Wang Yuquan

([1]*School of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Shandong Yantai 264005;*
[2]*Department of Mathematics, Capital Normal University, Beijing 100037*)

Abstract: This paper is concerned with the global existence of uniformly bounded solutions for a class of chemotaxis models in two dimensional spaces. By using detailed energy estimates, some a priori estimates in different types of spaces including $V_2(Q_{t,t+1})$, $W^{1,2}_{p,p}(Q_{t,t+1})$ and $L_{p,q}(Q_{t,t+1})$ and by applying uniform Gronwall inequality, we can prove the global existence of uniformly bounded solutions for a class of chemotactic systems with the proliferation term which involves both growth and death of the bacteria.

Key words: Chemotaxis; Global existence; Uniformly boundedness.

MR(2000) Subject Classification: 35K50; 35K57; 35K60