doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2024.03.017

加法公式在盲盒游戏中的应用

李 斐
（烟台大学 数学与信息科学学院，山东 烟台 264005）

摘　要　文中利用概率加法公式、全概率公式等，针对盲盒购买的两种方式，分别计算了购买 n 个盲盒时集齐整个系列的概率；以及在两种购买方式下，平均购买多少个盲盒才能集齐整个系列. 最后通过随机模拟，验证了前面结论的正确性.

关键词　概率加法公式；盲盒游戏；全概率公式

中图分类号　O212.1　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008－1399(2024)03－0056－03

Application of Probability Addition Formula in Blind Box Game

LI Fei
(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract　This paper calculates the probability of completing a series when purchasing blind boxes in two different ways, using probability addition and total probability formulas. It also determines the average number of blind boxes required to complete the series under each method and validates the conclusions through stochastic simulation.

Keywords　probability addition formula, blind box game, total probability formula

1　问题的背景与问题提出

“盲盒游戏”是当下年轻人所热衷的一款游戏. 以某主流公司的盲盒为例，该公司盲盒分为不同的系列，每个系列由 12 个基础款玩偶和 1 个隐藏款玩偶构成，玩家以集齐整个系列为乐趣.“盲盒”是充满不确定性和未知性的，在拆开盲盒之前，玩家无法预知其中的玩偶是哪一款. 盲盒公司正是利用了这种未知和不确定性抓住了年轻人的好奇心，从而实现盈利. 有报道称，盲盒已经成为了 95 后增长最快也是烧钱最快的一项爱好，据统计去年有将近 20 万的消费者在盲盒上的花费超过了 2 万元，其中最为硬核的玩家甚至豪掷百万.

收稿日期：2022－08－23　　修改日期：2023－02－06
基金项目：山东省自然科学基金(ZR2020MA033). 山东省高等教育本科教学改革研究项目(M2021333). 烟台大学本科教改项目(jyxm2021048). 中国高等教育学会“高等教育科学研究规划课题”(23sx0307).
作者简介：李斐(1982－)，女，山东烟台，博士，副教授，统计学，Email: feili@ytu.edu.cn.

盲盒公司有如此丰厚的盈利，说明玩家购买盲盒花费巨大. 以某主流公司的盲盒为例，每个盲盒的市场售价为 59 元或 69 元. 实际购买时，消费者会选择以下两种常见的购买方式：

（1）一个一个的购买，直到集齐整个系列；

（2）购买装有 12 个不同玩偶的“端盒”. 然后逐个购买，直到集齐整个系列. 端盒内装的 12 个玩偶，可能是 12 个不重复的基础款，也可能是 11 个基础款加 1 个隐藏款.

在这两种购买方式下，分别解决以下两个问题：

问题 1　假如已经购买了 n 个盲盒，那么在不同购买方式下，集齐整个系列的概率是多少呢？

问题 2　在不同购买方式下，平均要购买多少个盲盒，才能集齐整个系列？

2　问题 1 的求解

2.1　不含隐藏款的情形

假设整个系列是由 12 个基础款构成，玩家逐个购买，以集齐整个系列(12 个玩偶)为目的. 事件 B_n

表示 n 个盲盒能够集齐整个系列，$n=12,13,\cdots$，事件 A_i 表示 n 个盲盒中不含有第 i 款，$i=1,2,\cdots,12$. 显然 n 个盲盒无法集齐的概率

$$P(\bar{B}_n)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{12}).$$

则由概率加法公式得

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{12})\\&=\sum_{i=1}^{12}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 12}P(A_iA_j)+\cdots\\&\quad+(-1)^{12-1}P(A_1\cdots A_{12}).\end{aligned}$$

注意到

$$P(A_i)=\frac{(12-1)^n}{12^n},\ P(A_iA_j)=\frac{(12-2)^n}{12^n},$$

$$\cdots,\ P(A_{i1}\cdots A_{ik})=\frac{(12-k)^n}{12^n}.$$

因此

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{12})\\&=C_{12}^1\frac{(12-1)^n}{12^n}-C_{12}^2\frac{(12-2)^n}{12^n}+\cdots\\&\quad+(-1)^{12-1}C_{12}^{12}\frac{(12-12)^n}{12^n}\\&=C_{12}^1\frac{(12-1)^n}{12^n}-C_{12}^2\frac{(12-2)^n}{12^n}+\cdots\\&\quad+(-1)^{12-1}C_{12}^{12}\frac{(12-12)^n}{12^n}\\&=\sum_{k=1}^{12}(-1)^{k-1}C_{12}^k\frac{(12-k)^n}{12^n}.\end{aligned}$$

则 n 个盲盒能集齐的概率为

$$P(B_n)=1-\sum_{k=1}^{12}(-1)^{k-1}C_{12}^k\frac{(12-k)^n}{12^n}.\quad(1)$$

代入数值可得计算结果(表 1). 可以看出，在不考虑隐藏款的情形下，购买 55 个盲盒能以 90% 的把握集齐整个系列，花费 3245 元(以每个 59 元计). 而购买 108 个盲盒集齐整个系列的概率高达 99.9%.

表 1　购买 n 个盲盒的集齐概率

盲盒数 n	集齐概率	花费金额
12	0.0001	708 元
24	0.15	1416 元
34	0.50	2006 元
47	0.81	2773 元
55	0.90	3245 元
108	0.999	6372 元

2.2　含隐藏款的第一种购买方式

假设整个系列是由 12 个基础款加 1 个隐藏款构成，玩家逐个购买，以集齐整个系列(13 个玩偶)为目的. 仍然用事件 B_n 表示 n 个盲盒能够集齐整个系列，$n=13,14,\cdots$，用随机变量 X 表示 n 个盲盒中所含隐藏款的个数，取值为 $0,1,\cdots,n$，显然随机变量 $X\sim B(n,p)$，其中 p 为隐藏款出现的概率. 则由全概率公式得，

$$P(B_n)=\sum_{i=0}^{n}P(X=i)P(B_n\mid X=i).\quad(2)$$

注意到，当 $i=0$ 或 $i>n-12$ 时，是无法集齐整个系列的，即

$$P(B_n|X=i)=0.\quad(3)$$

而当 $1\leqslant i\leqslant n-12$ 时，利用式(1)的结果，可得到剩余的 $n-i$ 个盲盒能够集齐 12 个基础款的概率为

$$P(B_n\mid X=i)=1-\sum_{k=1}^{12}(-1)^{k-1}C_{12}^k\frac{(12-k)^{n-i}}{12^{n-i}},\quad(4)$$

将式(3)，式(4)代入式(2)中，可得 n 个盲盒能集齐的概率为

$$P(B_n)=\sum_{i=1}^{n-12}(C_n^ip^i(1-p)^{n-i}(1-\sum_{k=1}^{12}(-1)^{k-1}C_{12}^k(12-k)^{n-i}/12^{n-i})).\quad(5)$$

取盲盒公司公布的隐藏款概率 $p=1/144$，将不同的 n 的值代入式(5)中计算可得结果(表 2). 需要购买 363 个盲盒，花费 21417 元才能以 92% 的把握集齐整个系列，而要想以 99.9% 的把握集齐整个系列，则需要购买近千个盲盒，花费近 6 万元.

表 2　购买 n 个盲盒的集齐概率

盲盒数 n	集齐概率	花费金额
13	0.0000	767 元
113	0.5446	6667 元
263	0.8400	15517 元
363	0.9203	21417 元
563	0.9802	33217 元
963	0.9988	56817 元

2.3　含隐藏款的第二种购买方式

玩家先购买一个端盒，然后逐个购买，假设又买了 $n-12$ 个，$n\geqslant 13$. 依然用事件 B_n 表示 n 个盲盒能够集齐整个系列，$n=13,14,\cdots$，引入随机变量 X 表示端盒中有无隐藏款，$X=1$ 表示端盒中有隐藏款，$X=0$ 表示端盒中无隐藏款. 则有

$$\begin{aligned}P(B_n)=&P(X=1)P(B_n|X=1)\\&+P(X=0)P(B_n|X=0).\end{aligned}\quad(6)$$

易知

$$P(X=0)=(1-p)^{12},\ P(X=1)=1-(1-p)^{12}.$$

其中 p 为隐藏款出现的概率.

当端盒中没有隐藏款时,再买的 $n-12$ 个盲盒含有隐藏款的条件概率为

$$P(B_n|X=0)=1-(1-p)^{n-12}. \tag{7}$$

当端盒中有隐藏款时,则后面买的 $n-12$ 个盲盒必须含有缺的那个基础款. 可以借鉴 2.2 节的方法,根据 $n-12$ 个盲盒中所含隐藏款的个数对事件进行划分,可以得到

$$P(B_n \mid X=1)=\sum_{i=0}^{n-13}C_{n-12}^{i}p^{i}\ (1-p)^{n-12-i} \times\left(1-\left(\frac{11}{12}\right)^{n-12-i}\right). \tag{8}$$

将式(7)、式(8)代入式(6)可得 n 个盲盒能集齐整个系列的概率为

$$P(B_n)=(1-p)^{12}(1-(1-p)^{n-12})+(1-(1-p)^{12}) \times\sum_{i=0}^{n-13}\left[C_{n-12}^{i}p^{i}\ (1-p)^{n-12-i}\left(1-\left(\frac{11}{12}\right)^{n-12-i}\right)\right].$$

取隐藏款概率 $p=1/144$,将不同的 n 的值代入上式中计算可得结果(表 3). 对比两种购买方式集齐的概率(图 4),从图中可以看出,当集齐的概率较低(在 0.4 以下)时,购买相同数目的盲盒,第二种购买方式集齐的概率是高于第一种购买方式的。然而要想以较大概率集齐整个系列,两种购买方式没有明显差别.

表 3　购买 n 个盲盒的集齐概率

盲盒数 n	集齐概率	花费金额
13	0.01	767 元
113	0.55	6667 元
263	0.84	15517 元
363	0.92	21417 元
563	0.98	33217 元
963	0.999	56817 元

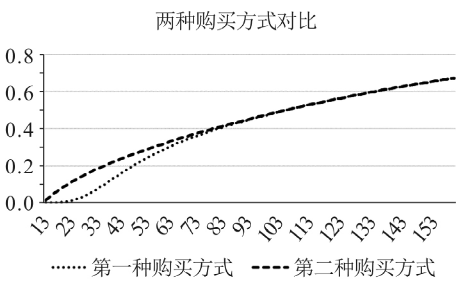

图 1　两种购买方式集齐概率对比

3　问题 2 的求解

3.1　不含隐藏款的情形

随机变量 Y 表示恰好集齐整个系列时所购买的盲盒数,Y 可能的取值为 12,13,…,当 $n\geqslant 13$ 时,有

$$P(Y=n)=P(B_n)-P(B_{n-1}) =\sum_{k=1}^{12}\left((-1)^{k-1}C_{12}^{k}k\ \frac{(12-k)^{n-1}}{12^{n}}\right).$$

当 $n=12$ 时,有

$$P(Y=12)=P(B_{12}) =1-\sum_{k=1}^{12}\left((-1)^{k-1}C_{12}^{k}\ \frac{(12-k)^{12}}{12^{12}}\right).$$

则平均购买个数为

$$EY=12-12\sum_{k=1}^{12}\left((-1)^{k-1}C_{12}^{k}\ \frac{(12-k)^{12}}{12^{12}}\right) +\sum_{n=13}^{\infty}\left[n\sum_{k=1}^{12}\left((-1)^{k-1}C_{12}^{k}k\ \frac{(12-k)^{n-1}}{12^{n}}\right)\right].$$

代入数值计算得

$$EY=37.24,$$

即平均购买 38 个盲盒时恰好集齐整个系列. 以每个市场价 59 元来计,需花费 2242 元.

3.2　第一种购买方式

仍然用随机变量 Y 表示恰好集齐整个系列时所购买的盲盒数,Y 可能的取值为 13,14,…,采用类似于 3.1 的处理方法,可得

$$EY=13^{2}p\ (1-p)^{12}\left[1-\sum_{k=1}^{12}\left((-1)^{k-1}C_{12}^{k}\ \frac{(12-k)^{12}}{12^{12}}\right)\right] +\sum_{n=14}^{\infty}\left[n\sum_{i=1}^{n-12}\left[C_{n}^{i}p^{i}\ (1-p)^{n-i}\left[1-\sum_{k=1}^{12}\left((-1)^{k-1}C_{12}^{k}\ \frac{(12-k)^{n-i}}{12^{n-i}}\right)\right]\right]- n\sum_{i=1}^{n-12}\left[C_{n}^{i}p^{i}(1-p)^{n-i}\left[1-\sum_{k=1}^{12}\left((-1)^{k-1}C_{12}^{k}\ \frac{(12-k)^{n-i}}{12^{n-i}}\right)\right]\right]\right].$$

代入数值计算得

$$EY=149.07,$$

即平均购买 149 个盲盒时恰好集齐整个系列. 以每个市场价 59 元来计,需花费 8791 元.

3.3　第二种购买方式

应用类似的处理方法可得

(下转第 69 页)

$$\left|\int_a^b F(x)\mathrm{d}x-\int_a^b (b-x)f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$=\left|\int_a^b (F(x)-G(x))\mathrm{d}x-\int_a^b (b-x)(f(x)-g(x))\mathrm{d}x\right|$$
$$<\int_a^b |F(x)-G(x)|\mathrm{d}x$$
$$+\int_a^b (b-x)|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<(b-a)\varepsilon$$
$$+(b-a)\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<2(b-a)\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可得等式对任意的 $f(x)$ 都成立.

例 2　设 $a<b<c<d$，$f(x)$ 在 (a,c) 和 (b,d) 上均为凸函数，则 $f(x)$ 在 (a,d) 上为凸函数.

证明　首先，$f(x)$ 在 (a,c) 和 (b,d) 上的凸性蕴含连续性[6]，因此 $f(x)$ 在 (a,d) 上连续. 我们只需说明对任意的 $\varepsilon\in\left(0,\frac{c-b}{2}\right)$，$f(x)$ 在 $(a+\varepsilon,d-\varepsilon)$ 上凸. 任取 $\alpha\in(0,\frac{\varepsilon}{4})$，定义

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha^2}\int_x^{x+\alpha}\mathrm{d}t\int_t^{t+\alpha}f(s)\mathrm{d}s,x\in(a+\varepsilon,\mathrm{d}-\varepsilon),$$

则 $f_\alpha(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}f_\alpha(x)=f(x)$. 进一步，$f_\alpha(x)$ 在 $(a+\varepsilon,c-\varepsilon)$ 和 $(b+\varepsilon,d-\varepsilon)$ 内分别为凸函数. 注意到 $c-\varepsilon>b+\varepsilon$，$f''_\alpha(x)\geqslant0$，$x\in(a+\varepsilon,d-\varepsilon)$. 所以 $f_\alpha(x)$ 在 $(a+\varepsilon,d-\varepsilon)$ 上为凸函数. 由凸函数的定义，我们可得

$$f_\alpha(sx+(1-s)y)\leqslant sf_\alpha(x)+(1-s)f_\alpha(y)$$
$$\forall s\in(0,1),x,y\in(a+\varepsilon,d-\varepsilon).$$

令 $\alpha\to0^+$，即得

$$f(sx+(1-s)y)\leqslant sf(x)+(1-s)f(y)$$
$$\forall s\in(0,1),x,\quad y\in(a+\varepsilon,d-\varepsilon),$$

所以 $f(x)$ 是 $(a+\varepsilon,d-\varepsilon)$ 上得凸函数，最后得到 $f(x)$ 在 (a,d) 上为凸函数.

3　结论

光滑逼近的思想是：如果 X 是某一类函数的全体，我们若要证 X 中的所有函数满足性质 P，则可以先对 X 的稠密子集 Y 中的函数证明满足性质 P，然后通过取极限得到结果. 鉴于这种逼近思想的重要性，我们总结了一些常用的关于函数光滑逼近的结论，并且介绍了它的一些具体应用.

参考文献

[1]　梅加强. 数学分析[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2020.
[2]　莫国瑞，刘开第. 函数逼近论方法[M]. 北京：科学出版社，2003.
[3]　楼红卫. 微积分进阶[M]. 北京：科学出版社，2018.
[4]　程艺，陈卿等. 数学分析讲义[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2020.
[5]　周民强，实变函数论[M]. 3 版. 北京：北京大学出版社，2016.
[6]　楼红卫. 数学分析 要点 · 难点 · 拓展[M]. 北京：高等教育出版社，2020.

(上接第 58 页)

$$EY=\frac{13}{12}(1-(1-p)^{12})+13p\ (1-p)^{12}$$
$$+\sum_{n=14}^{+\infty}\left[\frac{n}{12}(1-(1-p)^{12})\left(\frac{11}{12}\right)^{n-13}\right.$$
$$\left.+np\ (1-p)^{12}\ (1-p)^{n-13}\right].$$

代入数值计算得

$$\mathrm{EY}=145.41,$$

即平均购买 146 个盲盒时恰好集齐整个系列. 以每个市场价 59 元来计，需花费 8614 元.

4　模拟检验

为了验证上述计算结果的正确性，分别针对两种购买方式，进行了 1000 次的模拟，由模拟结果(表 5)可以看出，理论计算值与模拟结果非常接近. 另外，针对第二个问题，根据模拟数据，计算出在第一种购买方式下，平均购买 148 个盲盒时完成收集. 而在第二种购买方式，平均购买 144 个盲盒时完成收集. 这也与前面的理论计算结果非常接近. 因此验证了前面方法的正确性.

表 5　随机模拟与理论值比较

盲盒个数	概率方式一	模拟方式一	概率方式二	模拟方式二
13	0.0000	0	0.0131	0.014
23	0.0137	0.017	0.1137	0.141
33	0.0877	0.092	0.1925	0.21
63	0.3359	0.341	0.3544	0.375
113	0.5446	0.543	0.5450	0.548
363	0.9203	0.921	0.9203	0.924
563	0.9802	0.979	0.9802	0.975
963	0.9988	1	0.9988	0.996

参考文献

[1]　李贤平. 概率论基础[M]. 3 版 北京：高等教育出版社，2010.
[2]　王炳章，吕文. 概率论与数理统计[M]. 2 版 北京：科学出版社，2017.