

- 《万方数据-数字化期刊群》、《中文科技期刊数据库》全文收录期刊
- 《中国核心期刊(遴选)数据库》收录期刊
- 《CEPS思博网-中文电子期刊服务》收录期刊
- 《中国数学文摘》、《中国数学文献数据库》收录期刊
- 2000年获“陕西省优秀科技期刊一等奖”
- 国家新闻出版广电总局第一批认定学术期刊



# 高等数学研究

陳肖肖題

GAODENG SHUXUE YANJIU  
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS



# 2018 4

ISSN 1008-1399



9 771008 139184

07>

第21卷 第4期 (总第186期)

2018年7月出版

西北工业大学 陕西省数学会 主办

高等数学研究  
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

第 21 卷 第 4 期

(总第 186 期)

2018 年 7 月出版

(1954 年创刊)

国内外公开发行

主管: 陕西省科学技术协会

主办: 西北工业大学 陕西省数学会

编委会主编: 崔俊芝

副主编: 徐伟

常务编委: (按姓氏笔画为序)

王国正 王金金 刘三阳 陆全

林伟 赵小艳 赵彦晖 聂玉峰

徐伟 徐文雄 崔俊芝

名誉顾问: 张肇炽

编辑部

主任: 徐伟

常务副主任: 林伟

成员: 徐伟 林伟 王群

吕全义 吴志坚(美)

童增祥(美)

责任编辑: 徐仲

编辑出版: 高等数学研究编辑部

地址: 西安市西北工业大学

邮编: 710072

电话/传真: 86-29-88491574

投稿邮箱: gdsxyj@yeah.net

gdsxyj@nwpu.edu.cn

业务信箱: gdsxyj@126.com

印刷装订: 西安昆明印刷厂

邮发代号: 52-192

国外代号: BM2987

国内总发行: 中国邮政集团公司

陕西省报刊发行局

国外总发行: 中国国际图书贸易总公司

ISSN 1008-1399

CN 61-1315/O1

国内定价: ¥15.00 元

国外定价: \$15.00 元

# 目次

## 探讨与研究

高阶微分中值定理初探 ..... 楼红卫 (001)

非齐次树上  $m$  重非齐次马氏链的一个强偏差定理 ..... 金少华, 彭志兵, 徐泽灵, 刘璐 (007)

积分型 Kantorovich 不等式注记 ..... 时统业, 秦华 (010)

Riccati 型方程  $f'(y) \frac{dy}{dx} = P(x)f^2(y) + Q(x)f(y) + R(x)e^{\int Q(x)dx}$  的一个新的

可积条件 ..... 陈友朋, 王英吉, 罗思佳 (015)

关于 GA 凸函数差值估计的一个注记 ..... 曾志红, 时统业 (019)

## 辅导释疑

辨析正交矩阵的特征值 ..... 李志明, 李宏伟 (022)

概率论中几个易混淆概念的举例说明 ..... 李超群, 刘智慧 (023)

## 教学随议

不连续条件下的重积分微元法及其证明 ..... 陈玉 (026)

基于问题驱动的方向导数教学设计 ..... 张京良, 王建, 赵元章 (030)

关于“射影”概念的思考 ..... 张俊青, 牛雨茜 (035)

关于自然对数的底数  $e$  的几个问题 ..... 马华, 田国华, 任春丽, 王剑锋 (039)

复变函数教学的两则注记 ..... 乔守红, 卫雪梅, 邓秀勤 (041)

谈高等代数“四步自学法” ..... 安军 (044)

## 推广与应用

正交变换在解析几何中的应用 ..... 赵春娥, 闫统江, 赵旭波 (047)

关于条件期望  $E[Y|X=x]$  的定义和性质 ..... 李群, 杨卫国 (051)

$n$  维欧氏空间中圆锥体的体积和面积 ..... 徐明周, 周永正 (054)

一类可用于相依数据处理的新的二元统计分布 ..... 李国安 (056)

三阶常系数线性非齐次微分方程通解的降阶法 ..... 李文娟, 李书海, 汤获 (059)

浅论复合函数序列的一致收敛性 ..... 黎野平, 廖杰 (062)

多元正态分布二次型分布的推广 ..... 李斐, 吕文, 李琴 (065)

一类 Lotka-Volterra 方程的通解 ..... 朱殊洋, 朱晏 (067)

基于特征函数的逆高斯分布统计性质研究 ..... 乔舰, 李再兴, 范淑芬 (070)

一类二阶非线性常微问题正解的存在区间 ..... 王巍 (074)

## 方法与技巧

一次不定方程组的公式解 ..... 戴中林 (077)

判定某些复数项级数绝对收敛的一种方法 ..... 李景和 (080)

几个行列式的计算 ..... 王转德, 高中喜, 李厚彪 (082)

利用平面域的解析表示求条件概率密度 ..... 康晓蓉 (085)

一道二重积分例题的几种解法 ..... 闫善文, 张国铭 (087)

## 数学实验

任意阶极点留数的 Matlab 计算方法 ..... 李翠华, 薛艳, 张少坤, 刘海韵 (090)

函数  $\sin x/x$  及其应用 ..... 陶诏灵, 陈喜旺, 陈奕含 (093)

浮点数系下的求和运算 ..... 刘兰冬, 张生 (095)

## 教学改革

依托数学建模竞赛促进高职高专创新型人才培养 ..... 郭建敏, 康淑瑰, 崔亚琼, 郭彩霞 (097)

基于思维导线的 PPT 与板书协同应用教学实践研究——以高等数学课堂为例 ..... 洪涛清, 兰春霞 (100)

概率论与数理统计教学内容优化整合探讨 ..... 王泽龙, 朱炬波, 刘吉英 (104)

科研实验能力导向的数学实验实践与探索 ..... 王青山, 王琦, 王晓莉, 刘植 (106)

基于 SPOC 的概率统计课程建设研究 ..... 马奕, 涂淑珍, 吕卫平 (109)

## 数学模型

空间定点的阳光投影轨迹及其应用 ..... 高明海, 刘守鹏 (113)

防患于未然——代谢综合症发病趋势预测模型 ..... 张胜利, 童泽坤, 尹昊宇, 丰一帆 (119)

圆锥形塔的螺旋楼梯设计 ..... 余时伟 (125)

## 简讯

中美数学会联合年会在复旦大学隆重召开 ..... (018)

## 刊讯

考研增刊介绍 ..... (021)

勘误 ..... (092)

# STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 21 No. 4 (Serial No. 186) July, 2018

## CONTENTS

|                                                                                                                                       |                                                       |       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------|
| A Note on High Order Differential Mean Value Theorem .....                                                                            | LOU Hongwei                                           | (001) |
| A Strong Deviation Theorem for m-order Nonhomogeneous Markov Chain on Nonhomogeneous Tree .....                                       | JIN Shaohua, PENG Zhibing, XU Zeling, and LIU Lu      | (007) |
| Remarks on Kantorovich Integral Inequality .....                                                                                      | SHI Tongye and QIN Hua                                | (010) |
| A New Condition of Integrability of Equation of Riccati Type $f'(y)\frac{dy}{dx}=P(x)f^e(y)+Q(x)f(y)+R(x)e^{\int Q(x)dx}$ .....       | CHEN Youpeng, WANG Yingji, and LUO Sijia              | (015) |
| A Note on Estimation of Difference for GA-convex Functions .....                                                                      | ZENG Zhihong and SHI Tongye                           | (019) |
| On Eigenvalues of Orthogonal Matrix .....                                                                                             | LI Zhiming and LI Hongwei                             | (022) |
| On Several Easily-confused Concepts in Probability Theory .....                                                                       | LI Chaoqun and LIU Zhihui                             | (023) |
| The Theory and Proof of Element Method of Multiple Integrals under the Condition of Discontinuity .....                               | CHEN Yu                                               | (026) |
| Problem-based Teaching Design on Directional Derivative .....                                                                         | ZHANG Jingliang, WANG Jian, and ZHAO Yuanzhang        | (030) |
| Reflections on Concept of "Image" .....                                                                                               | ZHANG Junqing and NIU Yuqian                          | (035) |
| Questions about Natural Number e .....                                                                                                | MA Hua, TIAN Guohua, REN Chunli, and WANG Jianfeng    | (039) |
| Remarks on Teaching Theory of Complex Variable Functions .....                                                                        | QIAO Shouhong, WEI Xuemei, and DENG Xiuqin            | (041) |
| On Four-step Self-learning for Advanced Algebra .....                                                                                 | AN Jun                                                | (044) |
| Application of Orthogonal Transformation in Analytic Geometry .....                                                                   | ZHAO Chune, YAN Tongjiang, and ZHAO Xubo              | (047) |
| On Definition and Properties of Conditional Expectation .....                                                                         | LI Qun and YANG Weiguo                                | (051) |
| Volume and Surface Area of Cone in n-dimensional Euclidean Space .....                                                                | XU Mingzhou and ZHOU Yongzheng                        | (054) |
| A New Family of Bivariate Distributions for Dependent Data .....                                                                      | LI Guoan                                              | (056) |
| Reduced Order Method for General Solution of Third Order Linear Nonhomogeneous Differential Equation with Constant Coefficients ..... | LI Wenjuan, LI Shuhai, and TANG Huo                   | (059) |
| On Uniform Convergence of Composite Function Series .....                                                                             | LI Yeping and LIAO Jie                                | (062) |
| On Distribution of Quadratic Form of Normal Variable .....                                                                            | LI Fei, LV Wen, and LI Qin                            | (065) |
| General Solution of a Class of Lotka-Volterra Equations .....                                                                         | ZHU Shuyang and ZHU Yan                               | (067) |
| The Research of Statistical Properties for Inverse Gaussian Distribution Based on Character Function .....                            | QIAO Jian, LI Zaixing, and FAN Shufen                 | (070) |
| Existence Interval of Positive Solutions for a Second-order Nonlinear Ordinary Differential Equation .....                            | WANG Wei                                              | (074) |
| Formula Solution of Nonhomogeneous Linear Equations .....                                                                             | DAI Zhonglin                                          | (077) |
| A Criterion for Absolute Convergent Series of Complex Numbers .....                                                                   | LI Jinghe                                             | (080) |
| Evaluations of Several Determinants .....                                                                                             | WANG Zhuande, GAO Zhongxi, and LI Houbiao             | (082) |
| Calculating Conditional Probability Density Function by Using Algebraic Representation of Plane Region .....                          | KANG Xiaorong                                         | (085) |
| Multi-solutions of a Double Integral Problem .....                                                                                    | YAN Shanwen and ZHANG Guoming                         | (087) |
| Calculating Residues of Poles by Matlab .....                                                                                         | LI Cuihua, XUE Yan, ZHANG Shaokun, and LIU Haiyun     | (090) |
| Function and It's Application .....                                                                                                   | TAO Zhaoling, CHEN Xiwang, and CHEN Yihan             | (093) |
| Summation of Floating-point Numbers .....                                                                                             | LIU Landong and ZHANG Sheng                           | (095) |
| Mathematical Modeling Contest for Promoting Innovative Talents in Higher Vocational Colleges .....                                    | GUO Jianmin, KANG Shugui, CUI Yaqiong, and GUO Caixia | (097) |
| Practice Research on Collaboration of PPT and Blackboard-writing taking Advanced Mathematics as an example .....                      | HONG Taoqing and LAN Chunxia                          | (100) |
| On Optimization and Integration of Contents of Probability and Statistics .....                                                       | WANG Zelong, ZHU Jubo, and LIU Jiying                 | (104) |
| On Experimental-based Mathematical Experiments .....                                                                                  | WANG Qingshan, WANG Qi, WANG Xiaoli, and LIU Zhi      | (106) |
| On Design of Teaching Probability and Statistics Based on SPOC .....                                                                  | MA Yi, TU Shuzhen, and LV Weiping                     | (109) |
| Geometric Locus of Sunlight Projection of a Fixed-point in Space and its Application .....                                            | GAO Minghai and LIU Shoupeng                          | (113) |
| Prediction Model of Metabolic Syndrome .....                                                                                          | ZHANG Shengli, TONG Zekun, YIN Haoyu, and FENG Yifan  | (119) |
| The Helix Stair Design for Conic Tower .....                                                                                          | YU Shiwei                                             | (125) |

# 多元正态分布二次型分布的推广

李 斐, 吕 文, 李 琴

(烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

**摘 要** 通过利用矩阵广义逆和多元正态分布的相关性质, 给出并证明了  $p$  维正态向量  $X$  的二次型  $X'BX$  的分布的一般结果, 即  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$  ( $\Sigma$  为奇异矩阵) 时,  $X'BX$  的分布. 最后将线性模型中感兴趣的一个结果推广到了奇异正态分布的情况.

**关键词** 多元正态分布; 二次型; 非中心卡方分布

中图分类号 O29 文献标识码 A 文章编号 1008-1399(2018)04-0065-02

## On Distribution of Quadratic Form of Normal Variable

LI Fei, LV Wen, and LI Qin

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

**Abstract** By using the properties of the generalized inverse of matrix and multivariate normal distribution, we deduce a result for the distribution of the quadratic form of multivariate normal variable which is a singular matrix. A result of interest in linear models is also extended to singular covariance matrix.

**Keywords** multivariate normal distribution, quadratic form, non-central Chi Square distribution

### 1 引言

多元正态分布的性质是统计学中的重要教授内容, 多元正态随机向量的二次型分布是其中的一个重要性质, 在后续的多元正态分布均值检验中有重要的应用.

在多数教材(文献[1, 2])中该性质表述为:  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ ,  $\Sigma$  为  $p \times p$  阶的非奇异矩阵, 则有

$$(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi^2(p).$$

即相当于若  $Y \sim N_p(0, \Sigma)$ , 则  $Y' \Sigma^{-1} Y \sim \chi^2(p)$ .

该结果要求协方差矩阵  $\Sigma$  是非奇异的, 文献[3, 4, 5]均定义了奇异的多维正态分布, 文献[3]还

给出了奇异 Wishart 分布的定义, 文献[4]将上述二次型结果推广到了非中心的情况, 即  $\mu \neq 0$ . 但对当协方差矩阵  $\Sigma$  是奇异的情况, 并未多做研究(仅给出了  $\mu = 0$  时的结果). 我们希望借助一个基本定理, 将其它现有结论作为该定理的推论, 系统地梳理现有结论之间的关系, 统一证明方法. 并在此基础上, 给出最一般情况即  $Y \sim N_p(\mu, \Sigma)$ ,  $\text{rank}(\Sigma) = r \leq p$  时二次型  $Y' \Sigma^{-} Y$  的分布.

### 2 主要结果

我们采用文献[4]中的结果作为出发点, 定理如下,

**定理 1**<sup>[4]</sup> 若  $X \sim N_p(\mu, I_p)$ ,  $B$  为  $p \times p$  阶对称矩阵, 则  $X'BX$  服从非中心的  $\chi^2$  分布的充分必要条件为  $B$  为幂等矩阵( $B^2 = B$ ), 其中  $\chi^2$  分布的自由度为  $k = \text{rank}(B) = \text{tr} B$ , 非中心参数  $\delta = \mu' B \mu$ .

该定理的证明从略(参阅文献[4]). 下面做推

收稿日期: 2017-10-11 修改日期: 2017-11-25

基金项目: 国家自然科学基金(61503318), 山东省高校科研计划项目(J13LI06).

作者简介: 李斐(1982—), 女, 山东烟台, 博士, 讲师, 研究方向为多元统计分析, Email: feili@ytu.edu.cn

广, 首先将  $I_p$  推广到一般的非奇异的协方差矩阵  $\Sigma$ . 利用定理 1 的结果, 可有如下推论,

**推论 1** 若  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ ,  $B$  为  $p \times p$  阶对称矩阵, 则  $X'BX$  服从非中心的  $\chi^2$  分布的充分必要条件为  $B\Sigma$  为幂等矩阵, 其中  $\chi^2$  分布的自由度为  $k = \text{rank}(B)$ , 非中心参数  $\delta = \mu'B\mu$ .

**证明** 易知  $\Sigma^{-\frac{1}{2}}X \sim N_p(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu, I)$ , 又因为  $X'BX = (\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)' \Sigma^{\frac{1}{2}}B\Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}X$ , 由定理 1 得,  $X'BX$  服从非中心的  $\chi^2$  分布的充分必要条件为  $\Sigma^{\frac{1}{2}}B\Sigma^{\frac{1}{2}}$  是幂等矩阵. 即

$\Sigma^{\frac{1}{2}}B\Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}}B\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}B\Sigma^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow B\Sigma B\Sigma = B\Sigma$ , 自由度  $k = \text{rank}(\Sigma^{\frac{1}{2}}B\Sigma^{\frac{1}{2}}) = \text{rank}(B)$ , 结论得证.

继续做推广, 将非奇异的协方差矩阵  $\Sigma$  推广到奇异的情况, 这里先考虑  $\mu = 0$  的结果. 利用定理 1 的结果, 可有如下推论,

**推论 2** 若  $X \sim N_p(0, \Sigma)$ ,  $B$  为  $p \times p$  阶对称矩阵,  $\text{rank}(\Sigma) = r \leq p$ , 则  $X'BX$  服从中心的  $\chi^2$  分布的充分必要条件为  $\Sigma B \Sigma B \Sigma = \Sigma B \Sigma$ , 其中  $\chi^2$  分布的自由度为  $k = \text{rank}(B\Sigma)$ .

**证明**  $X = AY$ , 其中  $Y \sim N_r(0, I)$ ,  $A_{p \times r}$  为列满秩矩阵, 且  $\Sigma = AA'$ , 则  $X'BX = Y'A'BAY$ .

由定理 1 得,  $X'BX$  服从中心的  $\chi^2$  分布的充分必要条件为  $A'BA$  是幂等矩阵. 即

$$A'BAA'BA = A'BA \Leftrightarrow \Sigma B \Sigma B \Sigma = \Sigma B \Sigma,$$

利用矩阵秩的性质, 可得  $\text{rank}(A'BA) = \text{rank}(B\Sigma)$ .

特别的, 当  $B = \Sigma^-$  时,  $\Sigma^-$  为  $\Sigma$  的广义逆, 即  $\Sigma \Sigma^- \Sigma = \Sigma$ . 由上述推论可得,

$$(X - \mu)' \Sigma^- (X - \mu) \sim \chi^2(k),$$

其中  $k = \text{rank}(\Sigma)$ .

再做推广, 考虑最一般的情况, 即  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ ,  $\text{rank}(\Sigma) = r \leq p$ , 利用上述结果, 可得如下最一般的结果.

**推论 3** 若  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ ,  $B$  为  $p \times p$  阶对称矩阵,  $\text{rank}(\Sigma) = r \leq p$ ,  $\Sigma = AA'$ ,  $A_{p \times r}$  为列满秩矩阵, 且  $\mu \in R(A)$ . 则  $X'BX$  服从非中心的  $\chi^2$  分布的充分必要条件为  $\Sigma B \Sigma B \Sigma = \Sigma B \Sigma$ . 其中  $\chi^2$  分布的自由度为  $k = \text{rank}(B\Sigma)$ , 非中心参数  $\delta = \mu'B\mu$ .

**证明** 因为  $\mu \in R(A)$ , 即存在  $l \in R^r$ , 有  $\mu = Al$ , 则  $X = A(Y + l)$ , 其中  $Y \sim N_r(0, I)$ ,  $Y + l \sim N_r(l, I)$ .

则由定理 1,

$$X'BX = (Y + l)' A'BA (Y + l)$$

服从非中心的  $\chi^2$  分布的充分必要条件为  $A'BA$  为幂等矩阵, 即

$$A'BAA'BA = A'BA \Leftrightarrow \Sigma B \Sigma B \Sigma = \Sigma B \Sigma,$$

自由度  $k = \text{rank}(A'BA) = \text{rank}(B\Sigma)$ , 非中心参数  $\delta = l'A'BA l = \mu'B\mu$ . 故结论得证.

### 3 其它结果

**引理 4**<sup>[4]</sup>  $\Sigma$  为  $p \times p$  阶非负定的矩阵, 并作如下剖分

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $\Sigma_{11}$  为  $k \times k$  阶,  $\Sigma_{22}$  为  $(m-k) \times (m-k)$  阶, 则有

$$K(\Sigma_{22}) \subset K(\Sigma_{12}), R(\Sigma_{21}) \subset R(\Sigma_{22}).$$

其中  $K(\Sigma_{22}), K(\Sigma_{12})$  分别为矩阵  $\Sigma_{22}, \Sigma_{12}$  的核空间,  $R(\Sigma_{21}), R(\Sigma_{22})$  分别为矩阵  $\Sigma_{21}, \Sigma_{22}$  的值域.

我们用同样的证明方法不难得到如下的结果,

$$K(\Sigma_{11}) \subset K(\Sigma_{21}), R(\Sigma_{12}) \subset R(\Sigma_{11}). \quad (1)$$

**定理 5** 若  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ ,  $\text{rank}(\Sigma) = r \leq p$ ,  $X, \mu, \Sigma$  做如下剖分,

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

其中  $X_1, \mu_1$  为  $k \times 1$  阶,  $\Sigma_{11}$  为  $k \times k$  阶, 则

$$Q = (X - \mu)' \Sigma^- (X - \mu) \\ - (X_1 - \mu_1)' \Sigma_{11}^- (X_1 - \mu_1) \sim \chi^2(s).$$

这里  $\Sigma^-, \Sigma_{11}^-$  为  $\Sigma, \Sigma_{11}$  的广义逆,

$$s = \text{rank}(\Sigma) - \text{rank}(\Sigma_{11}).$$

**证明** 易见  $\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \sim N(0, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix})$ , 再

令  $H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^- & I \end{bmatrix}$ , 则有

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Sigma_{21}\Sigma_{11}^- & I \end{bmatrix}.$$

利用多元正态分布的性质, 不难得到

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \sim N(0, H \Sigma H').$$

(下转第 112 页)

### 5.3 保证学习的积极性和互动性

课前在线学习中,由于学生的时间管理水平不同和个体差异,有的学生可能会偷懒,不能及时完成课前学习,需要在平台设定学习时限.在线作业的批阅和学生问题,教师要及时批复,拖延时间过多,会打击学生的积极性.课堂讨论中部分学生不够积极,教师应该找出原因,进行个性化辅导.

## 6 结 语

基于 SPOC 的翻转课堂教学应用于概率统计课程是一种全新的尝试,结合了 MOOC 和传统的课堂教学,扬长避短,用面对面的传统教学解决了 MOOC 教学中情感交流和互动体验的缺失,另一方面将 MOOC 教学资源应用到小规模 SPOC 教学,缩减了平台建设成本,同时让学生拥有丰富的教学资源,让他们有更多选择的权利和参与性.教师从

教学的“主导者”转变为“引导者”,这些转变提高了教学效果,帮助学生建立完整的知识体系. SPOC 模式的教学将对我国的教育事业带来深远的影响,国内外的诸多学者都在不断研究和实践,具体效果还有待实践的验证.

### 参考文献

- [1] 康叶钦.在线教育的“后 MOOC 时代”——SPOC 解析[J].清华大学教育研究,2014,(1):85-93.
- [2] 马奕,涂淑珍,吕卫平.微课在概率统计教学中的应用与思考[J].广西民族师范学院学报,2016,33(3):53-55.
- [3] 刘超,吴喜之.统计学面临的挑战[J].统计研究,2012,(2):105-108.
- [4] 韩万江,张笑燕,陆天波等.基于 SPOC 的混合式教学模式课程建设初探[J].工业和信息化教育,2015,(11):38-42,48.

(上接第 66 页)

又因为

$$\begin{aligned}
 [H\Sigma H]' &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}' \\
 &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{11} & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}' \\
 &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ 0 & \Sigma_{22 \cdot 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}' \\
 &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} - \Sigma_{11}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \\ 0 & \Sigma_{22 \cdot 1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22 \cdot 1} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

其中第二个、第四个等号用了式子(1)的结果,

$\Sigma_{22 \cdot 1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$ , 故

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X_1 - \mu_1) \end{pmatrix} \\
 &\sim N(0, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22 \cdot 1} \end{pmatrix}).
 \end{aligned}$$

又因为  $\Sigma = H^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22 \cdot 1} \end{pmatrix} (H^{-1})'$ , 由广义

逆的性质可验证  $\Sigma$  的广义逆如下,

$$\Sigma^- = H' \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \end{pmatrix} H. \quad (2)$$

将式子(2)代入有,

$$\begin{aligned}
 (X - \mu)' \Sigma^- (X - \mu) &= Y' (H^{-1})' \Sigma^- H^{-1} Y \\
 &= Y' (H^{-1})' H' \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \end{pmatrix} H H^{-1} Y \\
 &= Y' \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \end{pmatrix} Y = Y_1' \Sigma_{11}^{-1} Y_1 + Y_2' \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} Y_2,
 \end{aligned}$$

即

$$Q = Y_2' \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} Y_2.$$

而  $Y_2 \sim N(0, \Sigma_{22 \cdot 1})$ , 则由推论 2 可得,

$$Q = Y_2' \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} Y_2 \sim \chi^2(s),$$

其中  $s = \text{rank}(\Sigma) - \text{rank}(\Sigma_{11})$ .

### 参考文献

- [1] 何晓群.多元统计分析[M].3版.北京:中国人民大学出版社,2004.
- [2] 王学民.应用多元分析[M].4版.上海:上海财经大学出版社,2014.
- [3] 刘金山. Wishart 分布引论[M].北京:科学出版社,2005.
- [4] Murihead R J. Aspects of multivariate statistical theory[M]. New York: Wiley, 1982.
- [5] Anderson T W. An introduction to multivariate statistical analysis[M]. New York: Wiley, 1984.

# 热忱欢迎订阅2018年《高等数学研究》

**高校、科研院所图书馆、资料室必备参考资料, 数学教师科研、教学的得力助手, 大学生学习数学的良师益友**

《高等数学研究》是西北工业大学和陕西省数学会联合主办的以高校教师、大学生和科技工作者为主要的服务对象、国内外公开发行的数学刊物, 是1950年初期我国创办的几份数学杂志之一, 2014年国家新闻出版广电总局第一批认定的学术期刊。多年来, 刊物深受读者喜爱, 得到了关心数学教育的众多数学家、数学教育家、广大数学教育工作者的关心和支持, 在此谨向热情关爱支持本刊的专家、学者和广大作者、读者表示衷心的感谢和敬意!

本刊为双月刊, A4开本, 单月月月底出版。2018年第2, 3, 5, 6期各64页, 定价7.5元; 第1, 4期各128页, 定价15元。全年6期总定价60元。一、二年级大学生读者, 可以只订阅其中与高等数学、线性代数、概率统计课程内容密切相关的4期, 第2, 3, 5, 6期, 共价30元。

订阅方式:

- (1) 可以在全国各地邮局订阅, 邮发代号: 52-192。
- (2) 直接汇款至本刊编辑部订阅。

近若干年的部分期刊尚有少量存量, 如有需要可直接与编辑部联系购买(含邮购)。

## **Studies in College Mathematics**

**(Bimonthly, Started in 1954)**

**Vol.21, No.4(Serial No.186), Jul. 2018**

**Sponsored by** Northwestern Polytechnical University and Shaanxi Mathematical Society

**Edited and published by** Editorial Board of Studies in College Mathematics

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, PRC)

**Editor-in-Chief** CUI Junzhi

**Printed by** Xi'an Kunming Printing House

**Distributed by** China International Book Trading Corporation

(P.O.Box 399, Beijing 100044, PRC)

CN 61-1315/O1/ISSN1008-1399

投稿专用信箱: [gdsxyj@yeah.net](mailto:gdsxyj@yeah.net)

邮发代号: 52-192

国内定价: 15.00元