

具有单一符号特征值的一阶拟线性双曲型方程组的精确边界能控性

朱本浩, 于立新

(烟台大学数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

摘要: 基于具有单一符号特征值的一阶拟线性双曲型方程组混合初-边值问题半整体 C^1 解的存在唯一性, 得到了具有单一符号特征值的一阶拟线性双曲型方程组的精确边界能控性。

关键词: 拟线性双曲型方程组; 半整体 C^1 解; 精确边界能控性

中图分类号: 0175.2

文献标志码: A

双曲型方程组在理论和应用上都具有重大意义。文献[1]和[2]对线性双曲型方程组建立了精确能控性和一致稳定性的完整理论, 文献[1]和[3]分别运用 Hilbert 唯一性方法和 Schauder 不动点定理提出了半线性波动方程的整体(局部)精确边界能控性。对于拟线性双曲型方程组, 文献[4-6]已经建立了完备的局部精确边界能控性理论。基于此理论, 文献[7-11]建立了树状网络中拟线性双曲型方程组的精确边界能控性理论。之后, 文献[12]和[13]提出了一种名为“节点精确边界控制”的精确边界控制, 并且建立相应的完整理论。

以上所有关于拟线性双曲型方程组的理论均要求该拟线性双曲型方程组既具有正特征值又具有负特征值, 然而, 对于只含有正特征值(负特征值)拟线性双曲型方程组的研究少之又少。但是该情况在理论和应用上都有重大作用, 如研究超临界非稳定流的精确能控性等, 为研究该理论, 本文将给出具有单一符号特征值的一阶拟线性双曲型方程组的初值问题和具有一般非线性边界条件的混合初-边值问题半整体解的存在唯一性, 并在此基础上建立具有

单一符号特征值的拟线性双曲型方程组的精确边界能控性理论。并且, 本文将提出一种新的精确边界控制: 在适当的时间 $T > 0$ 内, 存在边界控制, 使系统的解在给定时间内达到终端条件和给定节点条件。

考虑如下一阶拟线性双曲型方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad (1)$$

其中, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 是关于 (t, x) 的未知向量函数, $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ 是给定的具有光滑分量 $a_{ij}(\mathbf{u})$ ($i, j = 1, \dots, n$) 的 n 阶矩阵, $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{u}), \dots, f_n(\mathbf{u}))$ 是一给定的关于 $\mathbf{u}$ 的向量函数, 其中 $f_i(\mathbf{u})$ ($i = 1, \dots, n$) 充分光滑, 并且

$$\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

显然, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 是方程组(1)的一个平衡点。

由双曲型的定义知, 在考虑的区域上, 矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ 有 n 个实特征值 $\lambda_i(\mathbf{u})$ ($i = 1, \dots, n$) 和一组线性无关的左特征向量 $\mathbf{l}_i(\mathbf{u}) = (l_{i1}(\mathbf{u}), \dots, l_{in}(\mathbf{u}))$ ($i = 1, \dots, n$), 即

$$\mathbf{l}_i(\mathbf{u}) \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \lambda_i(\mathbf{u}) \mathbf{l}_i(\mathbf{u}) \quad (i = 1, \dots, n)。$$

我们有

收稿日期: 2021-06-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12071258); 烟台大学 2021 年研究生科技创新基金资助项目(YDYB2136)。

通信作者: 于立新(fdylx01@sina.com), 教授, 博士, 主要研究方向为偏微分方程的控制理论。

$$\det \|L_i(\mathbf{u})\| \neq 0, \quad (3)$$

假设在考虑的区域上,特征值满足

$$\lambda_i(\mathbf{u}) > 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4)$$

令

$$v_i = L_i(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5)$$

为了研究方程组(1)的精确边界能控性,给定初始条件

$$t = 0: \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x), 0 \leq x \leq L, \quad (6)$$

其中 L 是区间长度。给定如下边界条件

$$x = 0: v_i = h_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7)$$

其中 $h_i(t) \quad (i = 1, \dots, n)$ 是在其定义域上的 C^1 函数。

第 1 部分给出了具有单一符号特征值的拟线性双曲型方程组(1)的柯西问题 C^1 解的存在唯一性结论,以及双曲型方程组(1)混合初-边值问题的半整体 C^1 解的存在唯一性结论。

在第 2 部分,基于具有单一符号特征值的拟线性双曲型方程组的混合初-边值问题的半整体 C^1 解的存在唯一性结论,得到拟线性双曲型方程组(1)的经典精确边界能控性和一种新的精确边界能控性结论。

1 一阶拟线性双曲型方程组的半整体 C^1 解

为了得到拟线性双曲型方程组(1)的精确边界能控性,有必要考虑其在区间 $[0, T]$ 上的半整体 C^1 解,其中 $T > 0$ 是已知的,适当大的数。文献[14]和[15]建立了既有正特征值又有负特征值的拟线性双曲型方程组混合初-边值问题半整体 C^1 解的存在唯一性定理。对于只有正特征值(负特征值)的情况,与文献[14]和[15]类似,我们有

引理 1 假设 $a_{ij}(\mathbf{u}), \lambda_i(\mathbf{u}), f_i(\mathbf{u}) \quad (i = 1, \dots, n)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 都是关于其对应变量的 C^1 函数,且式(2)、(3)和(4)成立。则柯西问题(1)和(6)在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 存在唯一的 C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, 其中 $t = t(x)$ 是过点 $(t, x) = (0, 0)$ 的最小的特征线

$$\begin{cases} t'(x) = \min_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(\mathbf{u}(t(x), x))}, \\ t(0) = 0, \end{cases}$$

且当 $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{C^1[0, L]}$ 充分小(取决于 T) 时, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 的 C^1 模充分小。

引理 2 假设 $a_{ij}(\mathbf{u}), \lambda_i(\mathbf{u}), f_i(\mathbf{u}), h_i(t) \quad (i, j = 1, \dots, n)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 都是关于其对应变量的 C^1 函数,式(2)、(3)和(4)成立,且在点 $(t, x) = (0, 0)$ 的 C^1

相容性条件成立,那么对任意给定的 $T_0 > 0$, 混合初-边值问题(1)、(6)和(7)在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq t(x), 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的半整体 C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, 其中 $t = t(x)$ 是过点 $(t, x) = (0, 0)$ 的最小的特征线

$$\begin{cases} t'(x) = \min_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(\mathbf{u}(t(x), x))}, \\ t(0) = T_0, \end{cases}$$

且当 $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{C^1[0, L]}$ 和 $\|h_i\|_{C^1[0, L]}$ 充分小(取决于 T_0) 时, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 的 C^1 模充分小。

2 一阶拟线性双曲型方程组的精确边界能控性

本部分将讨论在一般非线性边界条件下,具有单一符号特征值拟线性双曲型方程组的精确边界能控性。首先考虑任意给定初值 $\boldsymbol{\varphi} \in C^1[0, L]$ 和终值 $\boldsymbol{\psi} \in C^1[0, L]$, 能否找到时间 $T > 0$ 和在 $x = 0$ 处的边界控制 $h_i(t) \quad (i = 1, \dots, n)$, 使得混合初-边值问题(1)、(6)和(7)在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的半整体 C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 满足终端条件

$$t = T: \mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}(x), 0 \leq x \leq L. \quad (8)$$

对此有如下定理:

定理 1 假设 $\lambda_i(\mathbf{u}), l_i(\mathbf{u})$ 和 $f_i(\mathbf{u})$ 都是关于其对应变量的 C^1 函数,且式(2)、(3)和(4)成立。如果

$$T > L \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(\mathbf{0})}, \quad (9)$$

则对任意给定 C^1 模充分小的初值 $\boldsymbol{\varphi} \in C^1[0, L]$ 和终值 $\boldsymbol{\psi} \in C^1[0, L]$, 存在 $x = 0$ 处 C^1 模充分小的边界控制 $h_i(t) \in C^1[0, T] \quad (i = 1, \dots, n)$, 使得混合初-边值问题(1)、(6)和(7)在区域 $R(T)$ 上存在唯一的 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 满足终端条件(8)。

为了证明定理 1, 只需证明以下引理:

引理 3 在定理 1 的条件下, $T > 0$ 由式(9)定义。对任意给定 C^1 模充分小的初值 $\boldsymbol{\varphi} \in C^1[0, L]$ 和终值 $\boldsymbol{\psi} \in C^1[0, L]$, 方程组(1)在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, 且满足初始条件(6)和终端条件(8)。

实际上, 设 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 是方程组(1)由引理 3 得到的一个解, 令

$$h_i(t) = v_i|_{x=0} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10)$$

其中 $v_i (i=1, \dots, n)$ 由式(5)定义, 则 $u = u(t, x)$ 是混合初-边值问题(1)、(6)和(7)在区域 $R(T)$ 上满足终端条件(8)的半整体 C^1 解。由引理2知, 此解唯一, 因此我们实现所需的精确边界可控性, 边界控制 $h_i(t) (i=1, \dots, n)$ 由式(10)定义。下面来证明引理3。

证明 由式(9)知, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使

$$T > L \sup_{|u| \leq \varepsilon_0} \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(u)}, \quad (11)$$

令

$$T_1 = T - L \sup_{|u| \leq \varepsilon_0} \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(u)}. \quad (12)$$

(I) 首先考虑方程组(1)的后向混合初-边值问题: 终端条件(8)和人为给定边界条件

$$x = L: v_i = f_i(t), T_1 \leq t \leq T (i=1, \dots, n),$$

其中 $v_i (i=1, \dots, n)$ 由式(5)定义, $f_i(t) \in C^1[T_1, T] (i=1, \dots, n)$ 为任意给定关于 t 的 C^1 模充分小的函数, 且在点 $(t, x) = (T, L)$ 满足 C^1 相容性条件。由引理2, 在区域 $R_b = \{(t, x) | T_1 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $u = u_b(t, x)$ 。

特别地, 有 $|u_b(t, x)| \leq \varepsilon_0, \forall (t, x) \in R_b$ 。

定义 u_b 在 $x=0$ 处的值为

$$x = 0: u_b = \bar{a}(t), T_1 \leq t \leq T,$$

其中 $\bar{a}(t) \in C^1[T_1, T]$ 的 C^1 模充分小。

由式(11)和(12)知, 存在定义在区间 $[0, T]$ 上 C^1 模充分小的 C^1 函数 $a(t)$, 在 $(t, x) = (0, 0)$ 点和初始条件(6)满足 C^1 相容性条件, 且

$$a(t) = \bar{a}(t), T_1 \leq t \leq T.$$

(II) 考虑方程组(1)的前向混合初-边值问题: 初始条件(6)和边界条件

$$x = 0: v_i = l_i(a(t))a(t) (i=1, \dots, n), \quad (13)$$

易知混合初-边值问题(1)、(6)和(13)在 $(t, x) = (0, 0)$ 处满足 C^1 相容性条件。由引理2知, 在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $u = u(t, x)$ 。

特别地, 有 $|u(t, x)| \leq \varepsilon_0, \forall (t, x) \in R(T)$ 。

(III) 为了完成引理3的证明, 只需证明 $u = u(t, x)$ 满足终端条件(8)。由于方程组(1)没有零特征值, 对换 t 和 x 的位置, 方程组(1)可以被等价改写为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + A^{-1}(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{F}(u) \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1}(u) F(u), \quad (14)$$

显然

$$\tilde{F}(0) = 0.$$

易知 $A^{-1}(u)$ 和 $A(u)$ 具有相同的特征向量, 因此对于方程组(14), $v_i (i=1, \dots, n)$ 依然可以由式(5)定义。

由引理1, 方程组(14)具初始条件

$$x = 0: u_b = \bar{a}(t), T_1 \leq t \leq T \quad (15)$$

的右向柯西问题, 在区域 $R_r = \{(t, x) | \bar{t}(x) \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一 C^1 模充分小的 C^1 解 $u = u_r(t, x)$, 其中 $t = \bar{t}(x)$ 为

$$\begin{cases} \bar{t}(x) = \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(u(t(x), x))}, \\ \bar{t}(0) = T_1. \end{cases}$$

由式(5)定义函数

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_n) = L(u), \quad (16)$$

其中 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 。

当 $u=0$ 时

$$\det \left| \frac{\partial(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right|_{(0,0)} = |l_{ij}(u)| \neq 0, \quad (17)$$

由反函数定理知在 $u=0$ 附近存在反函数 L 满足

$$L^{-1}(V) = u, \quad (18)$$

若 $u = u(t, x)$ 满足边界条件

$$x = 0: v_i = l_i(a(t))a(t), 0 \leq t \leq T (i=1, \dots, n), \quad (19)$$

有 $u = u(t, x)$ 也满足

$$x = 0: u = L^{-1}(v) = L^{-1}(L(a(t))) = a(t), \quad (20)$$

从而, C^1 解 $u = u(t, x)$, $u = u_b(t, x)$ 和 $u = u_r(t, x)$ 满足相同的方程组(14)和初始条件(15)。由引理1解的存在唯一性, 在区域 $R_r = \{(t, x) | \bar{t}(x) \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上有

$$u(t, x) \equiv u_b(t, x) \equiv u_r(t, x).$$

由于区域 $R_r = \{(t, x) | \bar{t}(x) \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 包含线段 $[0, L] \times T$, 且在区域 R_r 上 $u = u_b(t, x)$ 满足终端条件(8), 则 $u = u(t, x)$ 也满足终端条件(8)。引理3得证。

通常的边界控制要求在适当的时间内, 方程组在边界控制下的解达到给定的终端条件, 而节点精确边界控制要求在边界控制下解满足给定节点条件。接下来考虑将两者结合起来。考虑如下边界控制: 任意给定初始条件(6), 终端条件(8)和在 $(t, x) = (T, L)$ 点满足 C^1 相容性条件的边界函数 $\bar{u}(t)$, 能否找到时间 $T > 0$ 和在 $x=0$ 处的边界控制 $h_i(t) (i=1, \dots, n)$, 使对应的混合初-边值问题(1)、(6)和(7)在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存

在唯一的半整体 C^1 解 $u = u(t, x)$ 满足终端条件(8)和边界值

$$x = L: u = \bar{u}(t), \quad \bar{T} \leq t \leq T, \quad (21)$$

其中 $\bar{u}(t)$ ($\bar{T} \leq t \leq T$) 是给定关于 t 的 C^1 函数。对此有如下定理:

定理 2 假设 $\lambda_i(u)$, $l_i(u)$ 和 $f_i(u)$ 都是关于其对应变量的 C^1 函数, 且式(2)、(3)和(4)成立。如果

$$\bar{T} > L \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(\mathbf{0})} (T \geq \bar{T}), \quad (22)$$

则对任意给定 C^1 模充分小的初值 $\varphi \in C^1[0, L]$, 终值 $\psi \in C^1[0, L]$ 和在 $(t, x) = (T, L)$ 点满足 C^1 相容性条件的 C^1 模充分小的边界函数 $\bar{u}(t)$, 在 $x=0$ 处存在 C^1 模充分小的边界控制 $h_i(t) \in C^1[0, T]$ ($i = 1, \dots, n$), 使混合初-边值问题(1)、(6)和(7)在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $u = u(t, x)$ 且满足终端条件(8)和边界值(21)。

为了证明定理 2, 只需证明以下引理:

引理 4 在定理 2 的条件下, $T > 0$ 由式(22)定义。对任意给定的 C^1 模充分小的 $\varphi \in C^1[0, L]$, 终值 $\psi \in C^1[0, L]$ 和在 $(t, x) = (T, L)$ 点满足 C^1 相容性条件的 C^1 模充分小的边界函数 $\bar{u}(t)$, 方程组(1)在区域 $R(T)$ 上存在 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $u = u(t, x)$ 满足初始条件(6), 终端条件(8)和边界值(21)。

实际上, 设 $u = u(t, x)$ 是方程组(1)由引理 4 得到的一个解, 令

$$h_i(t) = v_i \Big|_{x=0} \quad (i = 1, \dots, n),$$

其中 v_i ($i = 1, \dots, n$) 由式(5)定义, 则 $u = u(t, x)$ 是混合初-边值问题(1)、(6)和(7)在区域 $R(T)$ 上满足终端条件(8)和边界值(21)的半整体 C^1 解, 由引理 2 知此解唯一。因此我们实现了精确边界可控性, 且边界控制 $h_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) 由式(10)定义。下面证明引理 4。

证明 由式(22)知, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使

$$\bar{T} > L \sup_{|u| \leq \varepsilon_0} \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(|u|)}, \quad (23)$$

令

$$T_1 = \bar{T} - L \sup_{|u| \leq \varepsilon_0} \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(|u|)}, \quad (24)$$

由 $T > \bar{T}$, 存在 C^1 模充分小的 $\bar{u} \in C^1[T_2, T]$ 在点 $(t, x) = (T, L)$ 满足 C^1 相容性条件且

$$\bar{u}(t) = \bar{u}(t), \quad \bar{T} \leq t \leq T.$$

(I) 首先考虑方程组(1)后向混合初-边值问

题: 终端条件(8)和边界条件

$$x = L: v_i = l_i(\bar{u}(t)) \bar{u}(t) \quad (i = 1, \dots, n),$$

其中 v_i ($i = 1, \dots, n$) 由式(5)定义, 由引理 2 在区域 $R_b = \{(t, x) | t(x) \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $u = u_b(t, x)$ 。

特别地, 有

$$|u_b(t, x)| \leq \varepsilon_0, \quad \forall (t, x) \in R_b.$$

定义 u_b 在 $x=0$ 处的值为

$$x = 0: u_b = \bar{a}(t), \quad T_1 \leq t \leq T,$$

其中 $\bar{a}(t) \in C^1[T_1, T]$ 的 C^1 模充分小。

由式(23)和(24)知, 存在定义在区间 $[0, T]$ 上 C^1 模充分小的 C^1 函数 $a(t)$, 在 $(t, x) = (0, 0)$ 点和初值(6)满足 C^1 相容性条件, 且

$$a(t) = \bar{a}(t), \quad T_1 \leq t \leq T.$$

(II) 考虑方程组(1)的前向混合初-边值问题: 初始条件(6)和边界条件

$$x = 0: v_i = l_i(a(t)) a(t) \quad (i = 1, \dots, n),$$

(25)

易知混合初-边值问题(1)、(6)和(25)在 $(t, x) = (0, 0)$ 处满足 C^1 相容性条件。由引理 2 知, 在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $u = u(t, x)$ 。

特别地, 有

$$|u(t, x)| \leq \varepsilon_0, \quad \forall (t, x) \in R(T).$$

(III) 为了完成引理 4 的证明, 只需证明 $u = u(t, x)$ 满足终端条件(8)和边界值(21)。由于方程组(1)没有零特征值, 对换 t 和 x 的位置, 方程组(1)可以被等价改写为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + A^{-1}(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{F}(u) \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1}(u) F(u), \quad (26)$$

显然

$$\tilde{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

易知 $A^{-1}(u)$ 和 $A(u)$ 具有相同的特征向量。因此对于方程组(26), v_i ($i = 1, \dots, n$) 依然可以由式(5)定义。

由引理 1, 方程组(26)具初始条件

$$x = 0: u_b = \bar{a}(t), \quad T_1 \leq t \leq T \quad (27)$$

右向柯西问题, 在区域 $R_r = \{(t, x) | \bar{t}(x) \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一 C^1 模充分小的 C^1 解 $u = u_r(t, x)$, 其中 $t = \bar{t}(x)$ 为

$$\begin{cases} \bar{t}(x) = \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(u(t(x), x))}, \\ \bar{t}(0) = T_1. \end{cases}$$

由式(5)定义函数

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathbf{L}(\mathbf{u}),$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 。

当 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 时,

$$\det \left| \frac{\partial(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right|_{(0,0)} = |l_{ij}(\mathbf{u})| \neq 0,$$

由反函数定理知在 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 附近存在反函数 L 满足

$$L^{-1}(\mathbf{V}) = \mathbf{u}.$$

若 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 满足边界条件

$$\begin{aligned} x = 0: v_i &= l_i(\mathbf{a}(t)) \mathbf{a}(t), \\ 0 \leq t \leq T \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

则 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 也满足

$$x = 0: \mathbf{u} = L^{-1}(\mathbf{V}) = L^{-1}(\mathbf{L}(\mathbf{a}(t))) = \mathbf{a}(t),$$

从而, C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b(t, x)$ 和 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r(t, x)$ 满足相同的方程组(26)和初始条件(27)。由引理2解的存在唯一性,在区域 $R_r = \{(t, x) | \bar{t}(x) \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上有

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{u}_b(t, x) = \mathbf{u}_r(t, x).$$

由于区域 $R_r = \{(t, x) | \bar{t}(x) \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 包含线段 $T \times [0, L]$ 和线段 $[\bar{T}, T] \times L$, 且在区域 R_r 上 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b(t, x)$ 满足终端条件(8)和边界值(21), 则 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 也满足终端条件(8)和边界值(21)。引理4得证。

接下来考虑如下边界条件的边界能控性问题。任意给定初始条件(6), 终端条件(8)和在 $(t, x) = (0, 0)$ 点满足 C^1 相容性条件的边界函数 $\bar{\mathbf{u}}(t)$, 能否找到时间 $T > 0$ 和在 $x = 0$ 处的边界控制 $h_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), 使对应的混合初-边值问题(1)、(6)和(7)在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的半整体 C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 满足终端条件(8)和边界值

$$x = L: \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(t), \quad 0 \leq t \leq \bar{T}, \quad (28)$$

其中 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ 是给定关于 t 的 C^1 函数。对此我们有如下定理:

定理3 假设 $\lambda_i(\mathbf{u})$, $l_i(\mathbf{u})$ 和 $f_i(\mathbf{u})$ 都是关于其对应变量的 C^1 函数, 且式(2)、(3)和(4)成立。对任意的 $\bar{T} > 0$, 令

$$T - \bar{T} > L \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(\mathbf{0})},$$

则对任意给定 C^1 模充分小的初值 $\boldsymbol{\varphi} \in C^1[0, L]$, 终值 $\boldsymbol{\psi} \in C^1[0, L]$ 和在 $(t, x) = (0, 0)$ 点满足 C^1 相容性条件的 C^1 模充分小的边界函数 $\bar{\mathbf{u}}(t)$, 存在 $x = 0$ 处 C^1 模充分小的边界控制 $h_i(t) \in C^1[0, T]$ ($i = 1, \dots, n$), 使混合初-边值问题(1)、(6)和(7)在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的

C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 且满足终端条件(8)和边界值(28)。

证明 首先考虑方程组(1)的前向混合初-边值问题: 初始条件(6)和边界条件

$$\begin{aligned} x = 0: v_i &= l_i(\bar{\mathbf{u}}(t)) \bar{\mathbf{u}}(t), \quad 0 \leq t \leq \bar{T} \\ \bar{T}(i = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (29)$$

由引理2知, 在区域 $R_f = \{(t, x) | 0 \leq t \leq \bar{T}, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_f(t, x)$ 。

特别地, 有

$$|\mathbf{u}_f(t, x)| \leq \varepsilon_0, \quad \forall (t, x) \in R_f.$$

定义 $\mathbf{u}_f(t, x)$ 在 $t = \bar{T}$ 处的值为

$$t = \bar{T}: \mathbf{u}_f = \bar{\boldsymbol{\varphi}}(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (30)$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(x)$ 的 C^1 模充分小。由定理1, 存在边界控制 $\bar{h}_i(t) \in C^1[\bar{T}, T]$ ($i = 1, \dots, n$) 在 $(t, x) = (\bar{T}, 0)$ 点满足 C^1 相容性条件, 使方程组(1)前向混合初-边值问题: 初始条件(30)和边界条件

$$x = 0: v_i = \bar{h}_i(t), \quad \bar{T} \leq t \leq T \quad (i = 1, \dots, n)$$

在区域 $\bar{R}_f = \{(t, x) | \bar{T} \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_f(t, x)$ 且满足终端条件(8)。

令

$$\mathbf{u}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{u}_f(t, x), & 0 \leq t \leq \bar{T}, \\ \bar{\mathbf{u}}_f(t, x), & \bar{T} \leq t \leq T, \end{cases}$$

由于 $l_i(\bar{\mathbf{u}}(t)) \bar{\mathbf{u}}(t) \in C^1[0, \bar{T}]$ 和 $\bar{h}_i(t) \in C^1[\bar{T}, T]$ ($i = 1, \dots, n$) 都在 $(t, x) = (\bar{T}, 0)$ 点满足 C^1 相容性条件, 令

$$h_i(t) = \begin{cases} l_i(\bar{\mathbf{u}}(t)) \bar{\mathbf{u}}(t), & 0 \leq t \leq \bar{T}, \\ \bar{h}_i(t), & \bar{T} \leq t \leq T, \end{cases}$$

则方程组(1)具初始条件(6)和边界条件

$$x = 0: v_i = h_i(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (i = 1, \dots, n)$$

的前向混合初-边值问题在区域 $R(T) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 且满足终端条件(8)。由于 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 满足式(29), 与式(16)–(20)的证明类似, 易知 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ 满足边界值(28)。定理3得证。

由定理2和定理3, 显然有如下定理:

定理4 假设 $\lambda_i(\mathbf{u})$, $l_i(\mathbf{u})$ 和 $f_i(\mathbf{u})$ 都是关于其对应变量的 C^1 函数, 且式(2)、(3)和(4)成立。对任意的 $\bar{T} > 0$, 令

$$\bar{T} - \bar{T} > L \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{\lambda_i(\mathbf{0})} \quad (0 \leq \bar{T} \leq \bar{T} \leq T),$$

则对任意给定 C^1 模充分小的初值 $\boldsymbol{\varphi} \in C^1[0, L]$, 终

值 $\psi \in C^1[0, L]$, 在 $(t, x) = (T, L)$ 点满足 C^1 相容性条件的 C^1 模充分小的边界函数 $\bar{u}(t)$ 和在 $(t, x) = (0, 0)$ 点满足 C^1 相容性条件的 C^1 模充分小的边界函数 $\bar{u}(t)$, 存在 $x = 0$ 处 C^1 模充分小的边界控制 $h_i(t) \in C^1[0, T] (i = 1, \dots, n)$, 使混合初-边值问题 (1)、(6) 和 (7) 在区域 $R(T)$ 上存在唯一的 C^1 模充分小的半整体 C^1 解 $u = u(t, x)$ 且满足终端条件 (8), 边界值 (21) 和边界值 (28)。

参考文献:

- [1] LIONS J L. Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Système Distribués [M]. Paris: Elsevier Masson, 1988.
- [2] RUSSELL D L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions [J]. SIAM Review, 1978, 20(4): 639-739.
- [3] ZUAZUA E. Exact controllability for the semilinear wave equation [J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1990, 69(1): 1-31.
- [4] LI Tatsien, RAO B P. Exact boundary controllability for quasi-linear hyperbolic systems [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2003, 41(6): 1748-1755.
- [5] LI Tatsien, RAO B P. Local exact boundary controllability for a class of quasilinear hyperbolic systems [J]. Chinese Annals of Mathematics, 2002, 23(2): 209-218.
- [6] LI Tatsien, RAO B P. Strong(weak) exact controllability and strong(weak) exact observability for quasilinear hyperbolic systems [J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2010, 31(5): 723-742.
- [7] GU Q L. Exact boundary controllability of unsteady supercritical flows in a tree-like network of open canals [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2008, 31(12): 1497-1508.
- [8] GU Q L, LI Tatsien. Exact boundary controllability for quasilinear wave equations in a planar tree-like network of strings [J]. Annales de l'institut Henri Poincaré C, Analyse non Linéaire, 2009, 26(6): 2373-2384.
- [9] LI Tatsien. Controllability and Observability for Quasilinear Hyperbolic Systems [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [10] LI Tatsien, RAO B P. Contrôlabilité exacte frontière de l'écoulement d'un fluide non-stationnaire dans un réseau du type d'arbre de canaux ouverts [J]. Comptes Rendus Mathématique, 2004, 339(12): 867-872.
- [11] LI Tatsien, RAO B P. Exact boundary controllability of unsteady flows in a tree-like network of open canals [J]. Methods and Applications of Analysis, 2004, 11(3): 353-366.
- [12] GUGAT M, HERTY M, SCHLEPER V. Flow control in gas networks: Exact controllability to a given demand [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2011, 34(7): 745-757.
- [13] LI Tatsien. Exact boundary controllability of nodal profile for quasilinear hyperbolic systems [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2010, 33(17): 2101-2106.
- [14] 李大潜, 俞文(鱼此), 沈玮熙. 拟线性双曲抛物耦合方程组的第二边值问题 [J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 1981, 2(1): 65-90.
- [15] LI Tatsien, YU W C. Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems [M]. Durham, North Carolina: Duck University Mathematics Department, 1985.

Exact Boundary Controllability for First Order Quasilinear Hyperbolic Systems with Only Positive Eigenvalues

ZHU Ben-hao, YU Li-xin

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract: Based on the existence and uniqueness result for the semi-global C^1 solution to the mixed initial-boundary value problem for first order quasilinear hyperbolic systems with only positive eigenvalues, the exact boundary controllability is established for first order general quasilinear hyperbolic systems.

Key words: quasilinear hyperbolic systems; semi-global C^1 solution; exact boundary controllability

(责任编辑 李春梅)