DOI：10.16541/j.cnki.2095-8420.2018.04.079

图论在数学建模中的应用

杨玉军，王大勇

（烟台大学 数学与信息科学学院，山东 烟台 264005）

摘 要：图论是数学一门重要分支，是一门建立图论模型，具有广泛应用的学科。尤其是随着计算机发展，图论中很多问题得以解决，更加促进图论学科发展及其应用。如今数学建模比赛中，出现了越来越多的图论问题，如赛程安排问题，最佳销售员推论问题，哈密尔顿图，最小生成树，网络流等问题。

关键词：数学建模；赛程安排；哈密尔顿图；最小生成树；网络流

本文引用格式：杨玉军，等 . 图论在数学建模中的应用 [J]. 教育现代化，2018，5（04）：187-188,193.

一 引言

当今数学发展是多样化的，图论便是在这发展长河中璀璨的一颗明珠。图论广泛应用在信息论、控制论、计算机科学与技术等多个领域。国内外重要建模比赛中，与图论有关的问题和用图论可以方便解决的问题屡见不鲜。本文结合图论学科相关知识，结合相关比赛题目，强调说明图论在解决相关问题是具有不可比拟的作用。

介绍一下图论基本概念 [1]：图 G 是有序三元数组 $(V(G)\ E(G)\ \varphi_G)$，其中 $V(G)$ 代表的是图 G 的顶点集合，$E(G)$ 代表的是图 G 的边集合，而 φ_G 则表示图 G 的每条边对应图 G 的无序顶点对。图 G 的度是 $V(G)$ 任一定点与其关联的边的数目，我们用 $d_G(v)$ 表示。

二 赛程安排的图论模型

我针对 2002 建模题目，我们可以把这道题归类为赛程安排。这是很典型的图论在实际问题中的应用。

问题 1：总共有 5 支球队在同一场地进行 10 场比赛，如何安排赛程，才能对参加比赛的 5 支球队尽可能公平呢？

为了解决这个问题，我们先给出竞赛图的定义：

定义 2：定义图 $G=(V,E)$，其中 V 是 n 支球队的集合 $V=\{0,1,2,\cdots,\ n-1\}$，而，$E=\{(i,j)\,|\,i,j\in V\}$ 即任意两个队伍有比赛就有一条连边，我们就称这个图 G 为竞赛图。

定义 3：一共有 n 支球队进行比赛，只要每支球队两场比赛之间都至少相隔 $\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil-2$，我们就认为这个赛程安排是完美赛。显然在这个题目中，5 支球队互相有比赛，所以这个图的竞赛图为完全图 K_5。本文我们给出这个题目求解简单介绍，为了大家理解图论在数学建模中的应用。

建立模型和求解 当参赛队伍数目为 $n=2m+1$，时，即为奇数时，在这个具体题目中，$m=5$。我们有以下两个定理：

定理 3[2]：当 $n=2m+1$，竞赛图 K_{2m+1} 可表示为 m 个边不重的哈密尔顿圈的并图。

定理 4[2]：当 $n=2m+1$，进行循环比赛时，存在完美赛程。

对于 5 支球队的循环赛，根据我们给定的定理，我们可以得住制定完美赛程的简单办法。第一步，写出 K_5 的 2 个边不重复哈密尔顿圈 C_1,C_2，如下：$C_1=\{0,1,2,4,3,4\}$；$C_2=\{0,2,3,1,4,4\}$。

接下来，我们对哈密尔顿圈进行编号，$C_1=\left\{\begin{matrix}\underbrace{0,1}_{1},\underbrace{2,4}_{2},\underbrace{3,4}_{3}\\ \cdots5\cdots6\cdots\end{matrix}\right\}$，我们也对 C_2 做同样的编号。我们可以得到 C_1,C_2 的编号为：

$C_1=(1,4,2,5,3);C_2=(6,9,7,10,8)$

将他们用矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} X & 1 & 6 & 3 & 8 \\ 1 & X & 4 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & X & 9 & 7 \\ 3 & 2 & 9 & X & 5 \\ 8 & 10 & 7 & 5 & X \end{pmatrix}$$

将赛程按照哈密尔顿圈 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 分成若干轮，一支球队如果出场次数越往后越有利。根据这一指标，可以给出衡量某支球队赛程优劣指标。

三 哈密尔顿图的实际应用

定义 5[3] 图 G 中的哈密尔顿圈是指恰好经过每

基金项目：此文是 2016 年 8 月国家自然科学基金委批准项目“图上随机游动和图的中间特征值研究”（项目编号：11671347）。

作者简介：杨玉军，男（汉族），山东高唐人，副教授，博士研究生，研究方向：主要从事图论及其应用的研究工作。

课程与教学

个顶点一次的闭路径。

问题 6 在全国大学生数学建模比赛中，有一道很典型的销售员最佳回路问题，具体题目是关于巡视某地灾情。只是把销售员最佳回路问题用另外一个方式进行表达。销售员最佳回路问题本质就是找出最小哈密尔顿圈问题。问题是某县在夏季发生水灾，相关负责人进行走访查看灾情。起点是县政府，然后去往各村，最后回到县政府。如果有三个小组去查看灾情，怎样规划路线，才能做到总路程最短，且花费时间最少。

建立模型和求解 我们已知图 $G=(V,E)$，构造出以 V 为顶点集的完备图 $G'=(V',E')$，x,y 两个顶点最短路的权，$\omega(x,y)=d_G(x,y)$。这里我们需要说明一点的是 G' 中最优哈密顿圈与赋权图中销售员最佳回路问题等价。下面给出相关算法：

（1）在最原始图 G 中，我们先找到一个哈密顿尔圈。

（2）求解图 G 任意两点的最短路径，运用公式 $\omega(x,y)=d_G(x,y)$。

（3）在 G' 任意找到一个哈密顿尔圈。

（4）运用对角线算法，可以计算出最初的哈密顿尔圈。

（5）得到哈密顿尔圈，可以进行优化。

（6）重复（5）步骤，直到找到权值最小的哈密尔顿圈。

这是解决这类销售员最佳回路问题的一种方法，称为 *Dijkstra* 算法。它适用于求解赋权图两点之间最短路径。

四　最小生成树的图论模型

问题 7 有一个石油公司，在多地建立储存站，公司打算建立管道把各个地方的储存站连接起来。如果两个储存站能修管道，两地就可以确定一个边。边上数字代表修管道所需的费用。如何修建管道才是最优建法。

建立模型和求解 分析可知这种问题对应的图是一个连通图，并且每条边上都有权值，是赋权图。求解这类问题的方法是找出原图的一个连通子图，考虑实际问题，我们要求的这个子图顶点必须全部含有，只是比原图少部分边。我们要找的这个子图肯定是连通的，是不含回路的。不含回路的图，我们称之为树。很明显，从树的定义就可以知道，树的顶点的度只分为两种，一种顶点的度数恰好为 1，形象的称它为悬挂点。另一种顶点我们称为割点，很明显它的度大于 1，如果去掉树中任一割点，树就会不连通。

定理 8 子图是生成树的充要条件是有 $n-1$ 条边并且没有回路。

修建管道的问题就可以转化为在图中找到权值最小的树，如果找到权值最小的树，很明显修建管道就是最省的。这就相当于求解最小生成树。所以我们下边给出求解最小生成树的算法：

（1）标明所有边的权值，并且按照从小到大进行排序。（2）任意选定第一条边。（3）再找下一条边，找下一条边的依据是不和上一条边构成回路。（4）重复（3）步骤，直到找到 $n-1$ 条边，结束。

这就是在图中寻找最小生成树的算法，众所周知，这种算法被称为 Kruskal 算法，也被称为贪婪算法。

五　网络最大流

我们介绍一类新的图，图 G 每条边上都赋予一个方向，就构成有向图。

定义 9 $G=(V,E)$ 有向图，在 V 中有一个源点 v_s，有汇点 v_t。任意弧上对应一个实数 C_{ij}，这是这条弧上能通过的最大量，称为容量。而实际通过该弧的量，称为流量。用 F_{ij} 表示。而集合 $F\ \{F_{ij}\}$ 是网络 G 的一个流。

定义 10 可行流要满足以下条件：（1）对任意一条弧 v_iv_j 都有 $0\le F_{ij}\le C_{ij}$。（2）对中间任意顶点 v_k 都有 $\sum f_{ik}=\sum f_{kj}$，即中间某个点的输入量等于输出量。

问题 11 有向图 G，共有 n 个点，m 条边，有最高点 v_h 和最低点 v_l。弧的方向都是由高点指向低点，图中任意一点，都存在 v_h 到该点，该点到 v_l 的弧。要求使用尽可能少的路径从 v_h 到 v_l 并且覆盖图中所有的边。

建立模型与求解 分析得出这类问题很明显是网络流问题，题目中要求路径覆盖所有边，并且路径数目最少，这就要求每条路径的流量大于等于 1，说明路径通过这条弧，并且要求从源点 v_h 流出来的总流量最小。我们给出以下算法：

（1）首先用朴素的增广路算法求出可行流。

（2）在（1）的基础上，再从汇点到源点找到一条最大的可行反向流。

能否找到增广路是解决这类网络流问题的关键所在，并且经过有限次之后，能够得出答案。网络最大流算法应用广泛，例如在运输容量确定下，给出运输方案等。需要说明的是，1956 年 Ford 和 Fulkson 已经给出求最大流的 2F 算法。

六　小结

图论是数学一个很重要的分支，有着极其广泛的应用。学好图论，用好图论，必须联系生活实际，建立模型，利用图论相关知识去解决实际问题。针对比赛中出现的越来越多与图论相关的实际问题。

（下转第 193 页）

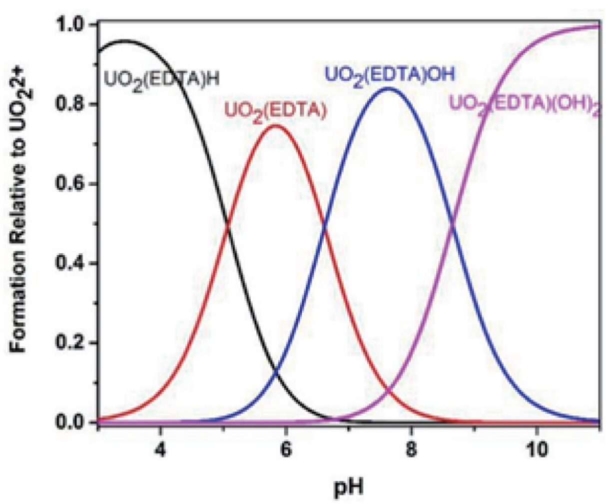

图 1　铀酰与 EDTA 的物种分布图

质的强大技术，该表征技术可利用电位滴定进行解离常数分析，利用络合常数进行物种分析，让我们获得了极有价值的新配体与核素的络合能力及在生理环境下形成的物种数据，对于研究一个新材料是否具有去除放射性核素的能力具有重要的导向意义。

参考文献

[1] Kate Maher, John R. Bargar, Gordon E, etal. Environmental Speciation of Actinides[J]. Inorg. Chem. 2013, 52:3510-3532.

[2] Ewing, R. C. C. R. Geosci. 2011, 343, 219-229;

[3] Ewing, R. C. Elements. 2006, 2, 331-334;

[4] Goldstein, S. J, Abdel-Fattah, A. I,Murrell, M. T.; Dobson, P. F.Norman, D. E.; Amato, R. S.; Nunn, A. J. Environ. Sci. Technol. 2010,44:1579-1586.

[5] Allard, T. Calas, G.; Ildefonse, P. Chem. Geol. 2007, 239, 50-63.

[6] Jide Xu, Donald W. Whisenhunt Jr, etal. Thorium(IV) Complexes of Bidentate Hydroxypyridinonates[J]. Inorg. Chem. 2003, 42:2665-2674.

[7] Raymond A. Guilmette, R. Hakimi, Patricia W. etal. "Competitive Binding of Pu and Am with Bone Mineral and Novel Chelating Agents." [J] Rad. Prot. Dosim. 2003, 105:527-534.

[8] 刘洁，葛晶晶，任玲玲，等 . 电位滴定法测定含钙合金中氧化钙 [J]. 冶金分析 , 2017, 37(8):59-63.

[9] 陈莉 . 电位滴定法测定维生素 U 制剂中维生素 U 的含量 [J]. 中国药师 , 2017, 10(20):1887-1889.

[10] 王秀玲 , 董淑玲 , 王红霞 , 等 . 浅议高校化学实验教学存在的问题与对策 [J]. 教育现代化 ,2017,4(41):187-188.

[11] 陈科 . 高校化学实验教学改革的有效方法 [J]. 教育现代化 ,2017,4(11):54-55+60.

（上接第 177 页）

三　开展闲暇教育的成效

通过闲暇教育，学生将成为时间的主人，学生既学会如何科学管理时间，又明确自己在闲暇各个时间内应该做什么，明确自己的学习发展目标，学习发展计划详细具体科学，实现目标的方式方法又保证了学校的各类活动丰富多彩，管理有序。学生通过参加各类活动，在多元化的活动和教育中得到了自我完善和发展，学生的闲暇生活充实、有意义、有价值，所有学生的知识和技能得到提升，综合能力及素质实现全面综合发展。

参考文献

[1] 刘芳 . 大学生闲暇生活态度研究综述 [J]. 课程教育研究 ,2013(36):35-36.

[2] 李肖苒，方兴 . 医学生人文精神培养方式完善与创新研究 [J]. 教育现代化，2016(29):5-6.

（上接第 188 页）

说明图论在处理实际问题方面有了较大的发展。除了本文所列举的在数学建模比赛中比较常见几类图论问题，还有如图的染色、欧拉公式、DMP 平面性算法等。

当然除了本文所引用例证，大学生数学建模竞赛中还有很多关于图论的问题，如 2004 年奥运会临时超市网店问题、2007 年乘公交问题、2011 交巡警服务平台的设置与调度问题。

相信随着科学技术的进步，图论会有更加迅速的发展，而图论的发展也会促进其他科学技术的发展。

参考文献

[1] J.A. Bondy, U.S.R. Murty. Graph Theory with applications[M]. London: Macmillan Press,1976.

[2] 代西武，李群高，李秀琴 . 赛程安排的图论模型 [J]. 北京建筑工程学院学报 , 2003,19(4):72-76.

[3] 王朝瑞 . 图论 [M]. 北京 : 北京理工大学出版社 ,2000.

[4] 苗晴 . 数学建模课程教学的研究与探讨 [J]. 教育现代化 .2016（02）：161-162.