



2013,33A(6):1178-1188

Mathematica Scientia
数学物理学报

<http://actams.wipm.ac.cn>

各向同性的麦克斯韦方程的内部传输问题 及反射参数的估计 *

曲风龙

(烟台大学数学与信息科学学院 山东烟台 264005)

李希亮

(山东工商学院数学与信息科学学院 山东烟台 264005)

摘要: 考虑时谐电磁波被一个可穿透的、表层覆盖一层很薄的具有高传导性材料的有界物体散射的问题. 该可穿透物体的散射问题可产生内部传输问题. 利用变分方法证明了内部传输问题解的适定性, 将文献 [1] 的结论推广到传导介质的散射问题中. 在物体的形状以及位置都已经确定的前提下, 进一步利用传输特征值、散射物体的直径及对应于双旋度算子的麦克斯韦第一特征值得到了反射指数的相关估计, 从而推广了文献 [2] 的结果.

关键词: 适定性; 麦克斯韦方程; 传输特征值; 反射参数.

MR(2000) 主题分类: 35P25; 35R30 **中图分类号:** O175.4 **文献标识码:** A

文章编号: 1003-3998(2013)06-1178-11

1 引言

内部传输问题在非齐次介质的散射问题中经常出现. 找到此类问题解的适定性条件对散射理论的发展具有非常重要的意义 (参考文献 [3]). 例如, 在可穿透物体形状的测定中, 此类问题解的适定性条件就起着极其重要的作用. 它的作用还体现在证明解的唯一性结论方面 (参考文献 [4-5]); 在线性采样方法的证明方面 (参考文献 [6-7]) 以及基于某种对偶泛函的新线性采样方法的讨论方面 (参考文献 [4, 8]).

Helmholtz 方程对应的内部传输问题首先是被 Colton 和 Kirsch^[9] 讨论的. 对于非齐次介质的声波散射问题, 除了特定的条件和特殊的球形散射体外, 传输特征值是否存在的问题至今都还没有定论 (参考文献 [10-11]). 文献 [12] 证明: 在一定的条件下, 传输特征值如果存在必定是离散的. 最近文献 [13] 对于各向同性的介质散射问题, 在内部反射指数大于一的条件下证明了 Helmholtz 方程存在无穷多个内部传输特征值. 这一结论被文献 [14] 推广到了各向异性介质的 Helmholtz 方程和麦克斯韦方程. 但是, 文献 [14] 的方法只能用于散射介质的反射指数小于背景介质的反射指数的情形. 基于文献 [13] 的方法, 文献 [15] 证明了散射介质的反射指数与背景介质的反射指数差距比较大的情形下, 内部传输问题的传输特征值是

收稿日期: 2012-03-18; 修订日期: 2013-01-15

E-mail: fenglongqu@amss.ac.cn; lixiliang@amss.ac.cn

* 基金项目: 国家自然科学基金 (11201402, 11201266) 和天元基金 (11026098, 11026150) 资助

存在的. 在其他特殊情形下, 传输特征值的存在性问题, 可参考文献 [16–18] 以及其中的参考文献.

利用积分方程的方法考虑内部传输问题解的适定性问题, 可参考文献 [7, 19–21], 利用分解方法解决该问题的文献可参考文献 [22] 及其中的参考文献. 另外一种研究内部传输问题解的适定性的有效方法是变分方法. 内部传输问题的变分方法首先是文献 [10, 12] 讨论 Helmholtz 方程时提出的, 但他们的方法不能直接应用到麦克斯韦方程. 基于将麦克斯韦方程化为一个四阶边值问题的变分方法, 文献 [1, 23] 研究了麦克斯韦方程的内部传输问题解的适定性. 本文的方法也是基于这种变分方法的思想.

本文在一定条件下得到了麦克斯韦方程解的适定性后, 进一步利用传输特征值、散射物体的直径及对应于双旋度算子的麦克斯韦第一特征值得到了反射指数的相关估计. 文献 [2] 提出利用传输特征值得到了反射指数的上下界估计. 他们首先在 Helmholtz 方程对应的反射指数 $\Im n = 0$ 和 $n(x) > 1$ 的条件下, 得到了反射指数 n 的下界, 然后证明了当 $n(x) < 1$ 时, 内部传输特征值比负拉普拉斯算子的狄利克雷第一特征值要大的结论. 最后, 在反射指数是常数的假设下, 他们得到了麦克斯韦方程的类似结论. 基于文献 [2] 的思想, 我们得到了传导介质中麦克斯韦方程的反射指数更细致的估计, 同时证明了反射指数不仅依赖于内部传输特征值还依赖于散射物体的直径及对应于双旋度算子的麦克斯韦第一特征值.

本文安排如下: 第二节介绍传导介质的麦克斯韦方程, 利用变分方法证明该问题解的适定性; 第三节推导反射指数的相关估计.

2 内部传输问题

设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 是一个联通的有界区域, 其边界 ∂D 具有三阶连续导数. 反射指数 $n(x) \in C(\bar{D})$, 并且 $\Re n(x) \geq 0$, $\Im n(x) \geq 0$. 假设区域 D 的表面覆盖一层很薄的传导材料, 设 $\lambda(x)$ 是描述覆盖层传导材料的复值函数. 本文将在如下两种情况下考虑传导边界的内部传输问题解的适定性以及反射指数的相关估计

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad & \lambda = 0; \\ \text{(A2)} \quad & \lambda = -i\eta(x) \text{ 和 } \eta(x) > 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

本文总是假设波数 k 是一个常数, 我们首先介绍一些常用的索伯列夫空间.

$$H(\operatorname{curl}, D) := \{u \in (L^2(D))^3, \operatorname{curl} u \in (L^2(D))^3\},$$

$$H_0(\operatorname{curl}, D) := \{u \in H(\operatorname{curl}, D), u \times \nu = 0 \text{ on } \partial D\},$$

$$H(\operatorname{div} 0, D) := \{u \in (L^2(D))^3, \operatorname{div} u = 0 \text{ in } D\},$$

$$L_t^2(\partial D) := \{u \in (L^2(\partial D))^3, \nu \cdot u = 0 \text{ on } \partial D\},$$

$$TH^s(\partial D) := \{u \in (H^s(\partial D))^3, \nu \cdot u = 0 \text{ on } \partial D\},$$

其中 ν 是 ∂D 的单位外法线方向.

定义本文所用的空间

$$X = \{u \in H(\operatorname{curl}, D), \operatorname{curl} u \in H(\operatorname{curl}, D), \operatorname{curl} u \times \nu \in L_t^2(\partial D)\},$$

对应的范数为

$$\|u\|_X^2 = \|u\|_{(L^2(D))^3}^2 + \|\operatorname{curl} u\|_{(L^2(D))^3}^2 + \|\operatorname{curl} \operatorname{curl} u\|_{(L^2(D))^3}^2 + \|\operatorname{curl} u \times \nu\|_{L_t^2(\partial D)}^2.$$

设 $f \in TH^{\frac{3}{2}}(\partial D)$, $\psi \in TH^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ 是两个给定的边界函数, 我们在 $X \times X$ 上考虑如下的内部传输问题

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} V - k^2 n V = 0, & \text{in } D, \\ \operatorname{curl} \operatorname{curl} E - k^2 E = 0, & \text{in } D, \\ (V - E) \times \nu = f, & \text{on } \partial D, \\ \operatorname{curl}(V - E) \times \nu = ik\lambda E_T + \psi & \text{on } \partial D, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $E_T = \nu \times (E \times \nu)$ 是电场 E 的切向分量.

为了叙述方便, 本文将方程组 (2.2) 简记为 (ITP). 下面, 我们将采用类似于文献 [1] 的变分方法将方程组 (2.2) 改写为一个四阶边值问题.

令 $w = V - E$, $u = nV - E$, 从而我们得到

$$V = (n-1)^{-1}(u-w), \quad E = (n-1)^{-1}(u-nw). \quad (2.3)$$

将方程组 (2.2) 中两个方程作差得

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} w = k^2 u. \quad (2.4)$$

联合 (2.3) 式、(2.4) 式得

$$V = (n-1)^{-1}(k^{-2} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w - w). \quad (2.5)$$

将上式代入方程组 (2.2) 的 V 方程, 可以将原方程化为一个如下的四阶边值问题

$$\begin{aligned} & \operatorname{curl} \operatorname{curl}[(n-1)^{-1} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w] - k^2 \operatorname{curl} \operatorname{curl}[(n-1)^{-1} w] \\ & - k^2 n(n-1)^{-1} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w + k^4 n(n-1)^{-1} w \\ & = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

边界条件为

$$w \times \nu = f, \quad \operatorname{curl} w \times \nu = \psi + ik\lambda(n-1)^{-1}(k^{-2} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w - nw)_T. \quad (2.7)$$

将 (2.6) 式乘以试验函数 $\bar{\phi}$, 然后在区域 D 上积分, 由边界条件 (2.7) 式, 我们得到 (ITP) 如下的等价变分形式: 对任意的试验函数 $\phi \in X_0 = \{u \in X, u \times \nu|_{\partial D} = 0\}$, 求解 $w \in X$ 使得

$$\begin{aligned} & ((n-1)^{-1} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w, \operatorname{curl} \operatorname{curl} \phi)_D - k^2 ((n-1)^{-1} w, \operatorname{curl} \operatorname{curl} \phi)_D \\ & - k^2 (n(n-1)^{-1} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w, \phi)_D + k^4 (n(n-1)^{-1} w, \phi)_D - \left\langle \frac{ik}{\lambda} \operatorname{curl} w_T, \operatorname{curl} \phi_T \right\rangle_{\partial D} \\ & = \left\langle \frac{ik}{\lambda} \nu \times \psi, \operatorname{curl} \phi_T \right\rangle_{\partial D} - k^2 \langle n(n-1)^{-1} f, \operatorname{curl} \phi_T \rangle_{\partial D} + k^2 \langle (n-1)^{-1} f, \operatorname{curl} \phi_T \rangle_{\partial D}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

这里 $(\cdot, \cdot)_D$ 表示矢量函数的 $(L^2(D))^3$ 内积, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial D}$ 表示边界矢量函数的 $L_t^2(\partial D)$ 内积. 注意到 $n(n-1)^{-1} = 1 + (n-1)^{-1}$, 因此我们可以将 (2.8) 式改写为: 求解 $w \in X$ 满足

$$A(w, \phi) - k^2 B(w, \phi) - \left\langle \frac{ik}{\lambda} \operatorname{curl} w_T, \operatorname{curl} \phi_T \right\rangle_{\partial D} = F(\phi), \quad \forall \phi \in X_0, \quad (2.9)$$

其中 $A(\cdot, \cdot)$ 和 $B(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $X \times X$ 上的如下的两个半双线性形式

$$A(w, \phi) = ((n-1)^{-1}(\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 w), (\operatorname{curl} \operatorname{curl} \phi - k^2 \phi))_D + k^4(w, \phi)_D, \quad (2.10)$$

$$B(w, \phi) = (\operatorname{curl} w, \operatorname{curl} \phi)_D, \quad (2.11)$$

其中 (2.9) 式右端的 $F(\phi)$ 为

$$F(\phi) = \left\langle \frac{ik}{\lambda} \nu \times \psi, \operatorname{curl} \phi_T \right\rangle_{\partial D} - k^2 \langle n(n-1)^{-1} f, \operatorname{curl} \phi_T \rangle_{\partial D} + k^2 \langle (n-1)^{-1} f, \operatorname{curl} \phi_T \rangle_{\partial D}. \quad (2.12)$$

下面我们用函数的正则性理论, 将求解非齐次边值的变分问题 (2.9) 的解转化为求解齐次的变分问题. 利用文献 [1, 定理 3.1], 我们知道对于给定的 $f \in TH^{\frac{3}{2}}(\partial D)$, $\psi \in TH^{\frac{1}{2}}(\partial D)$, 存在函数 $\tilde{w} \in H^2(D)^3$, 使得 $\tilde{w} \times \nu = f$, $\operatorname{curl} \tilde{w} \times \nu = \psi$, $\forall x \in \partial D$. 进一步, 由于

$$A(\tilde{w}, \phi) - k^2 B(\tilde{w}, \phi) - \left\langle \frac{ik}{\lambda} \operatorname{curl} \tilde{w}_T, \operatorname{curl} \phi_T \right\rangle_{\partial D}$$

是空间 X 上的一个关于函数 ϕ 的有界线性泛函, 因而由瑞兹表示定理知存在函数 $G(\tilde{w}) \in X$ 使得

$$(G(\tilde{w}), \phi)_X = A(\tilde{w}, \phi) - k^2 B(\tilde{w}, \phi) - \left\langle \frac{ik}{\lambda} \operatorname{curl} \tilde{w}_T, \operatorname{curl} \phi_T \right\rangle_{\partial D},$$

并且

$$\|G(\tilde{w})\|_X \leq C(\|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial D)} + \|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)}),$$

其中 $C > 0$ 是一个不依赖于函数 f 和 ψ 的常数.

令 $w_0 = w - \tilde{w}$, 容易证明, 求解 $w \in X$ 满足 (2.8) 式等价于求解 $w_0 \in X_0$ 满足

$$A(w_0, \phi) - k^2 B(w_0, \phi) - \left\langle \frac{ik}{\lambda} \operatorname{curl}(w_0)_T, \operatorname{curl} \phi_T \right\rangle_{\partial D} = F(\phi) - (G(\tilde{w}), \phi)_X, \quad \forall \phi \in X_0. \quad (2.13)$$

注 当 $\lambda = 0$ 时, 文献 [1] 证明了内部传输问题解的适定性.

为了证明变分问题 (2.13) 解的适定性, 我们需证明下面的唯一性定理.

定理 1 假设 $\lambda(x)$ 满足 (2.1) 式中的条件 (A2), 内部反射指数 n 满足对任意 $x \in D$, 有 $\Im n(x) > 0$. 则变分问题 (2.13) 的解 $w_0 \in X_0$ 是唯一的.

证 设 $w_0 \in X_0$ 是如下变分问题

$$A(w_0, \phi) - k^2 B(w_0, \phi) - \left\langle \frac{ik}{\lambda} \operatorname{curl}(w_0)_T, \operatorname{curl} \phi_T \right\rangle_{\partial D} = 0, \quad \forall \phi \in X_0$$

的解. 令 $\phi = w_0$, 由半线性形式 $A(\cdot, \cdot)$ 和 $B(\cdot, \cdot)$, 可以得到

$$\begin{aligned} & ((n-1)^{-1}(\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0), (\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0))_D + k^4(w_0, w_0)_D \\ & - k^2(\operatorname{curl} w_0, \operatorname{curl} w_0)_D - \left\langle \frac{ik}{\lambda} \operatorname{curl}(w_0)_T, \operatorname{curl}(w_0)_T \right\rangle_{\partial D} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

取 (2.14) 式的虚数部分得

$$\left(\frac{\Im n}{|n-1|^2} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0), (\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0) \right)_D = 0.$$

由条件 $\Im n > 0$ 得 $\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0 = 0$. 再取 (2.14) 式的实数部分, 由假设 (A2) 得

$$k^4(w_0, w_0)_D - k^2(\operatorname{curl} w_0, \operatorname{curl} w_0)_D + \left\langle \frac{k}{\eta} \operatorname{curl}(w_0)_T, \operatorname{curl}(w_0)_T \right\rangle_{\partial D} = 0. \quad (2.15)$$

注意到 $\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0 = 0$, $w_0 \in X_0$, 因而由分部积分公式知

$$k^4(w_0, w_0)_D = k^2(\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0, w_0)_D = k^2(\operatorname{curl} w_0, \operatorname{curl} w_0)_D,$$

上式联合 (2.15) 式及假设 (A2) 可以推出 $\operatorname{curl}(w_0)_T = 0$, 因此由上述讨论我们得到如下方程

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0 = 0, & \text{in } D, \\ w_0 \times \nu = 0, \quad \operatorname{curl}(w_0)_T = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases} \quad (2.16)$$

最后, 由 Holmgren 定理得 $w_0 = 0$. |

下面我们将证明在传导介质的内部传输问题解的适定性中起着至关重要作用的引理.

引理 2 假设 $\lambda(x)$ 满足 (2.1) 式的条件 (A2), 内部反射指数 $n(x)$ 满足对任意 $x \in D$, $\Re n(x) \geq 1$, $\Im n(x) \geq \delta > 0$, 其中 $\delta > 0$ 充分小. 则如下的半双线性形式 $L(w_0, \phi) = A(w_0, \phi) - \left\langle \frac{ik}{\lambda} \operatorname{curl}(w_0)_T, \operatorname{curl} \phi_T \right\rangle_{\partial D}$ 在空间 $X_0 \times X_0$ 上是强制的.

证 在半双线性形式 $L(w_0, \phi)$ 中取 $\phi = w_0$, 易得

$$\begin{aligned} L(w_0, w_0) &= ((n-1)^{-1}(\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0), (\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0))_D + k^4(w_0, w_0)_D \\ &\quad - \left\langle \frac{ik}{\lambda} \operatorname{curl}(w_0)_T, \operatorname{curl}(w_0)_T \right\rangle_{\partial D}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

分别取 (2.17) 式的实数部分和虚数部分, 我们得到

$$\begin{aligned} |\Im L(w_0, w_0)| &= \left(\frac{\Im n}{|n-1|^2} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0), (\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0) \right)_D, \\ |\Re L(w_0, w_0)| &= \left(\frac{\Re n - 1}{|n-1|^2} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0), (\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0) \right)_D \\ &\quad + k^4(w_0, w_0)_D + \left\langle \frac{k}{\eta} \operatorname{curl}(w_0)_T, \operatorname{curl}(w_0)_T \right\rangle_{\partial D}. \end{aligned}$$

因此, 由反射指数 n 的假设以及条件 (A2) 得

$$|L(w_0, w_0)| \geq \alpha \|\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0\|_{(L^2(D))^3}^2 + k^4 \|w_0\|_{(L^2(D))^3}^2 + \beta \|(\operatorname{curl} w_0)_T\|_{L_t^2(\partial D)}^2, \quad (2.18)$$

其中 α, β 是两个正数. 令

$$A = \|\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0\|_{(L^2(D))^3}, \quad B = k^2 \|w_0\|_{(L^2(D))^3}, \quad C = \|(\operatorname{curl} w_0)_T\|_{L_t^2(\partial D)},$$

因此, (2.18) 式可化为

$$|L(w_0, w_0)| \geq \alpha A^2 - 2\alpha AB + (1 + \alpha)B^2 + \beta C^2. \quad (2.19)$$

选取一个正数 $\varepsilon_0 = \frac{2\alpha+1-\sqrt{4\alpha^2+1}}{2}$, 使得

$$|L(w_0, w_0)| \geq \varepsilon_0(A^2 + B^2) + \beta C^2. \quad (2.20)$$

由条件 $w_0 \times \nu|_{\partial D} = 0$ 得

$$\|\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0 - k^2 w_0\|_{(L^2(D))^3}^2 = \|\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_0\|_{(L^2(D))^3}^2 - 2k^2 \|\operatorname{curl} w_0\|_{(L^2(D))^3}^2 + k^4 \|w_0\|_{(L^2(D))^3}^2 \geq 0,$$

上式进一步可推得

$$2k^2 \|\operatorname{curl} w_0\|_{(L^2(D))^3}^2 \leq A^2 + B^2. \quad (2.21)$$

联合 (2.20) 式, (2.21) 式以及索伯列夫空间 X 的范数定义得

$$|L(w_0, w_0)| \geq C^* \|w_0\|_X^2,$$

这里 C^* 是一个依赖于波数 k 及正数 α, β 的正数. |

由引理 2, 我们可以在半双线性形式 $L(\cdot, \cdot)$ 上应用 Lax-Milgram 定理, 从而得到一个双射算子. 又注意到 $\operatorname{div}(\operatorname{curl} w_0) = 0$, $\operatorname{curl} w_0 \in H(\operatorname{curl}, D)$, 故 $\operatorname{curl} w_0 \in (H^1(D))^3$, 因此, 由 $(H^1(D))^3$ 紧嵌入到 $(L^2(D))^3$ 的紧性得到半双线性形式 $B(\cdot, \cdot)$ 的一个紧算子. 上述讨论结合 Fredholm 二择一定理及唯一性定理 1 知下述定理是成立的.

定理 3 假设内部反射指数 $n(x)$ 满足引理 2 的条件, $\lambda(x)$ 满足 (2.1) 式的任意一个条件. 则 (ITP) 在空间 $(L^2(D))^3 \times (L^2(D))^3$ 上有唯一的解 (V, E) , 并且有如下的估计

$$\|V\|_{(L^2(D))^3} + \|E\|_{(L^2(D))^3} \leq C(\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} + \|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)}),$$

其中 $C > 0$ 是一个不依赖于函数 f 和 ψ 的常数.

3 内部反射指数的相关估计

在证明了传导介质的内部传输问题解的适定性后, 本节将进一步利用传输特征值、散射物体的直径及对应于双旋度算子的麦克斯韦第一特征值推导反射指数的相关估计. 我们首先定义传输特征值 k : 如果存在波数 k 使得下述内部传输问题

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} V - k^2 n V = 0, & \text{in } D, \\ \operatorname{curl} \operatorname{curl} E - k^2 E = 0, & \text{in } D, \\ (V - E) \times \nu = 0, & \text{on } \partial D, \\ \operatorname{curl}(V - E) \times \nu = i k \lambda E_T, & \text{on } \partial D, \end{cases} \quad (3.1)$$

有非平凡的解, 则称波数 k 为上述内部传输问题 (3.1) 的传输特征值. 由第二节中的定理 3 知, 当 $\Im n > 0$ 时, 传导介质的内部传输问题有唯一的解, 并且这个唯一的解只依赖于边界函数. 因此, 由传输特征值的定义及条件 $\Im n(x) \geq 0$ 知, 只有当内部反射指数 n 满足 $\Im n = 0$ 时, 传输特征值才存在. 因而, 本节我们假设反射指数 n 满足 $\Im n = 0$, 并且表面传导指数 $\lambda(x)$ 满足下列任意一个条件

(A1) $\lambda = 0$;

(A2) $\lambda = -i\eta(x)$ 和 $\eta(x) > 0$.

下面我们将分几种不同的情况证明内部反射指数 n 的几个估计.

定理 4 假设 $\lambda(x)$ 满足条件 (A1), 内部反射指数 n 满足 $n > 1$. 则内部反射指数 n 有如下的估计 $n \geq \frac{d^2(\lambda_0(D) - k^2) + \sqrt{d^4(\lambda_0(D) - k^2)^2 + 1}}{4k^2 d^2} + 1$, 其中 k 是任意一个传输特征值, $\lambda_0(D)$ 是 $\operatorname{curl} \operatorname{curl}$ 算子在区域 D 上的第一麦克斯韦特征值, d 是区域 D 的直径.

证 设 k 是一个传输特征值, 并且 (V, E) 是对应于 k 的方程组 (3.1) 的解. 令 $w = V - E$, 由方程组 (3.1) 知

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 w = k^2(n-1)V, & \text{in } D, \\ w \times \nu = 0, & \text{on } \partial D, \\ \operatorname{curl} w \times \nu = ik\lambda E_T, & \text{on } \partial D. \end{cases} \quad (3.2)$$

令 $w_0 = nV - E$, $w = V - E$, 从而有

$$V = (n-1)^{-1}(w_0 - w), \quad \operatorname{curl} \operatorname{curl} w = k^2 w_0,$$

上式进一步推出

$$V = (n-1)^{-1}(k^{-2} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w - w).$$

将上式代入方程组 (3.1) 的 V 方程得

$$(\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2 n) \frac{1}{n-1} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2) w = 0. \quad (3.3)$$

在 (3.3) 式两边同时乘以 $\bar{w} \in X_0$, 然后在区域 D 上积分得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2 n) \frac{1}{n-1} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2) w \cdot \bar{w} dx \\ &= \int_D (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2 n) \bar{w} \cdot \frac{1}{n-1} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2) w dx \\ &= \int_D \frac{1}{n-1} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 n w|^2 dx + k^2 \int_D (|\operatorname{curl} w|^2 - k^2 n |w|^2) dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

由文献 [10, 定理 6.1] 知

$$\begin{aligned} E(x) &= -\operatorname{curl} \int_{\partial D} \nu(y) \times E(y) \Phi(x, y) ds(y) + \nabla \int_{\partial D} \nu(y) \cdot E(y) \Phi(x, y) ds(y) \\ &\quad - ik \int_{\partial D} \nu(y) \times H(y) \Phi(x, y) ds(y) + \operatorname{curl} \int_D \{\operatorname{curl} E(y) - ikH(y)\} \Phi(x, y) dy \\ &\quad - \nabla \int_D \operatorname{div} E(y) \Phi(x, y) dy + ik \int_D \{\operatorname{curl} H(y) + ikE(y)\} \Phi(x, y) dy, \quad x \in D, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $\Phi(x, y)$ 是 Helmholtz 方程在三维空间的基本解. 由 n 是一个常数及方程组 (3.1) 知 $\operatorname{div} V = \operatorname{div} E = 0$, 从而 $\operatorname{div} w = \operatorname{div}(V - E) = 0$, 又因为 $\operatorname{div}(\operatorname{curl} w) = 0$, $w \times \nu|_{\partial D} = 0$, $\operatorname{curl} w_T|_{\partial D} = 0$, 于是, 有 $w \in H$, $\operatorname{curl} w \in H$ 成立, 其中 $H = \{u \in H_0(\operatorname{curl}, D), \operatorname{div} u = 0 \text{ in } D\}$. 又注意到 $H = \{u \in H_0(\operatorname{curl}, D), \operatorname{div} u = 0 \text{ in } D\} \hookrightarrow H^1(D)^3$, 从而在 (3.5) 式中可取 $H = \frac{1}{ik} \operatorname{curl} E(y)$, $E(y) = w(y)$, 于是由条件 $w \times \nu|_{\partial D} = 0$, $\operatorname{curl} w \times \nu|_{\partial D} = 0$ 得

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_D \{\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 w\} \Phi(x, y) dy \\ &= \int_D \frac{1}{\sqrt{m}} \{\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 n w + k^2 m w\} \sqrt{m} \Phi(x, y) dy, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $m = n - 1$. 通过对 Helmholtz 方程在三维空间的基本解 $\Phi(x, y)$ 表达式的直接计算, 我们得到如下估计

$$\begin{aligned} \int_D |\Phi(x, y)|^2 dy &\leq \frac{1}{(4\pi)^2} \int_D \frac{dy}{|x - y|^2} \leq \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{|x-y|<d} \frac{dy}{|x - y|^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi dr = \frac{d}{4\pi}, \end{aligned}$$

其中 d 是区域 D 的直径. 因此, 由 (3.6) 式得

$$\begin{aligned} |w(x)|^2 &\leq 2 \int_D |\Phi(x, y)|^2 m dy \int_D \frac{1}{m} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 n w|^2 dy \\ &\quad + 2k^4 \int_D |\Phi(x, y)|^2 dy \int_D m^2 |w|^2 dy \\ &\leq m \frac{d}{2\pi} \int_D \frac{1}{m} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 n w|^2 dy + \frac{k^4 d}{2\pi} \int_D m^2 |w|^2 dy. \end{aligned} \quad (3.7)$$

在区域 D 上对 (3.7) 式两边积分得

$$\|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 \leq \frac{d^4 m}{12} \int_D \frac{1}{m} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 n w|^2 dy + \frac{k^4 d^4 m^2}{12} \int_D |w|^2 dy.$$

再将上式代入 (3.4) 式得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \frac{1}{n-1} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 n w|^2 dx + k^2 \int_D |\operatorname{curl} w|^2 - k^2 n |w|^2 dx \\ &\geq \frac{12}{d^4 m} \|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 - k^4 m \|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 + k^2 \int_D |\operatorname{curl} w|^2 - k^2 n |w|^2 dx \\ &\geq \|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 \left(\frac{12}{d^4 m} - k^4 m + k^2 \lambda_0(D) - k^4 m - k^4 \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 $\lambda_0(D)$ 是 $\operatorname{curl} \operatorname{curl}$ 算子在区域 D 上的第一麦克斯韦特征值, 参考文献 [24]. 由 k 是一个传输特征值知 $\|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 > 0$, 从而, 由 (3.8) 式得

$$0 \geq \frac{12}{d^4 m} - k^4 m + k^2 \lambda_0(D) - k^4 m - k^4.$$

于是, 注意到 $m = n - 1$, 我们得到内部反射指数 n 的估计

$$n \geq \frac{d^2(\lambda_0(D) - k^2) + \sqrt{d^4(\lambda_0(D) - k^2)^2 + 1}}{4k^2 d^2} + 1. \quad |$$

定理 5 假设 $\lambda(x)$ 满足条件 (A2), 内部反射指数 n 满足 $n > 1$. 则如下估计 $n > \frac{\lambda_0(D)}{k_0^2}$ 成立, 其中 k_0 是区域 D 上的第一传输特征值, $\lambda_0(D)$ 是 $\operatorname{curl} \operatorname{curl}$ 算子在区域 D 上的第一麦克斯韦特征值.

证 类似于定理 4 的讨论, 我们得到 (3.3) 式对于条件 (A2) 仍然成立. 因此, 在 (3.3) 式两端乘以 $\bar{w} \in X_0$, 然后在区域 D 上积分得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2 n) \frac{1}{n-1} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2) w \cdot \bar{w} dx \\ &= \int_D (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2 n) \bar{w} \cdot \frac{1}{n-1} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2) w dx \\ &\quad + \int_{\partial D} \left(\nu \times \frac{1}{n-1} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2) w \right) \cdot \operatorname{curl} \bar{w}_T ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

由 $\frac{1}{n-1} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2) w = k^2 V$, 条件 (A2) 以及 (3.2) 式中的边界条件得

$$\nu \times \frac{1}{n-1} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2) w|_{\partial D} = k^2 (\nu \times V)|_{\partial D} = k^2 (\nu \times E)|_{\partial D} = \frac{k^2}{ik\lambda} \operatorname{curl} w_T.$$

将上式代入 (3.9) 式, 再由条件 (A2) 可以得到如下结论

$$0 = \int_D \frac{1}{n-1} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 n w|^2 dx + k^2 \int_D (|\operatorname{curl} w|^2 - k^2 n |w|^2) dx + \int_{\partial D} \frac{k}{\eta} |\operatorname{curl} w_T|^2 ds. \quad (3.10)$$

假设

$$\int_D (|\operatorname{curl} w|^2 - k^2 n |w|^2) dx \geq 0,$$

则由 (3.10) 式及条件 $n > 1$, $\eta(x) > 0$ 可以推出 $\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 n w = 0$, $\operatorname{curl} w_T = 0$, 于是, 由边界条件 $w \times \nu = 0$ 得到 $w = 0$, 从而, $V = E = 0$, 这与假设 k 是传输特征值矛盾. 由上述讨论, 我们知道

$$\int_D (|\operatorname{curl} w|^2 - k^2 n |w|^2) dx < 0.$$

又

$$\begin{aligned} \int_D (|\operatorname{curl} w|^2 - k^2 n |w|^2) dx &= \|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 \left(\frac{(\operatorname{curl} w, \operatorname{curl} w)_{(L^2(D))^3}}{(w, w)_{(L^2(D))^3}} - k^2 n \right) \\ &\geq \|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 (\lambda_0(D) - k^2 n), \end{aligned} \quad (3.11)$$

从而, $\lambda_0(D) - k^2 n < 0$, 即有 $n > \frac{\lambda_0(D)}{k_0^2}$, 其中 k_0^2 是区域 D 上的第一传输特征值. I

下面我们将在内部反射指数 $0 < n < 1$ 的情况下, 证明 n 的几个上界估计.

定理 6 假设 $\lambda(x)$ 满足条件 (A1), 内部反射指数 n 满足 $0 < n < 1$. 则我们得到如下估计 $n \leq 1 - \frac{1}{d^4 k^2 (k^2 - \lambda_0(D))}$, 并且每个内部传输特征值 k 都满足 $k^2 > \lambda_0(D)$, 这里 $\lambda_0(D)$ 是 $\operatorname{curl} \operatorname{curl}$ 算子在区域 D 上的第一麦克斯韦特征值, d 是区域 D 的直径.

证 设 k 是一个传输特征值, 并且 (V, E) 是对应于 k 的方程组 (3.1) 的解. 令 $w = V - E$, 则类似于定理 4 的证明, 我们有

$$(\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2 n) \frac{1}{1-n} (\operatorname{curl} \operatorname{curl} - k^2) w = 0. \quad (3.12)$$

进一步, 在 (3.12) 式两端同乘以 $\bar{w}$, 然后在区域 D 上积分得

$$0 = \int_D \frac{1}{1-n} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 w|^2 dx + k^2 \int_D |\operatorname{curl} w|^2 - k^2 |w|^2 dx. \quad (3.13)$$

由 (3.6) 式知

$$w(x) = \int_D \{\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 w\} \Phi(x, y) dy.$$

从而

$$\begin{aligned} |w(x)|^2 &\leq \int_D |\Phi(x, y)|^2 m dy \int_D \frac{1}{m} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 w|^2 dy \\ &\leq \frac{md}{4\pi} \int_D \frac{1}{m} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 w|^2 dy, \end{aligned} \quad (3.14)$$

这里 $m = 1 - n$. 将 (3.14) 式两端在区域 D 上积分, 然后利用已得结论 $\int_D |\Phi(x, y)|^2 dy \leq \frac{d}{4\pi}$ 得

$$\|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 \leq \frac{d^4 m}{24} \int_D \frac{1}{m} |\operatorname{curl} \operatorname{curl} w - k^2 w|^2 dy.$$

代入 (3.13) 式, 可以推出

$$0 \geq \|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 \left(\frac{24}{d^4 m} + k^2 \lambda_0(D) - k^4 \right).$$

由于 k 是一个内部传输特征值, 从而, $\|w(x)\|_{(L^2(D))^3}^2 > 0$, 于是

$$0 \geq \frac{24}{d^4 m} + k^2 \lambda_0(D) - k^4,$$

上式进一步可以推得 $n \leq 1 - \frac{1}{d^4 k^2 (k^2 - \lambda_0(D))}$, 并且每个内部传输特征值 k 都满足 $k^2 > \lambda_0(D)$. 证毕. |

定理 7 假设 $\lambda(x) = i\eta(x)$, 其中 $\eta(x) > 0$, 内部反射指数 n 满足 $0 < n < 1$. 则每个内部传输特征值 $k > 0$ 都满足 $k^2 > \lambda_0(D)$, 其中 $\lambda_0(D)$ 是 curl curl 算子在区域 D 上的第一麦克斯韦特征值.

证 设 k 是一个传输特征值, 并且 (V, E) 是对应于 k 的方程组 (3.1) 的解. 类似于定理 4 的证明, 我们知道 (3.12) 式在定理 7 的条件下仍然成立, 于是, 在 (3.12) 式两端同乘以 $\bar{w}$, 然后在区域 D 上积分, 利用方程组 (3.1) 的边界条件及假设 $\lambda(x) = i\eta(x)$, 我们有如下计算

$$0 = \int_D \frac{1}{1-n} |\text{curl curl } w - k^2 w|^2 dx + k^2 \int_D |\text{curl } w|^2 - k^2 |w|^2 dx + \int_{\partial D} \frac{k}{\eta} |\text{curl } w_T|^2 ds. \quad (3.15)$$

假设对每个内部传输特征值 $k > 0$ 都满足 $k^2 \leq \lambda_0(D)$, 则由条件 $\eta(x) > 0$, $0 < n < 1$, (3.11) 式, (3.15) 式推得 $w = 0$, 这与假设 k 是传输特征值矛盾, 因此, 所有的内部传输特征值 $k > 0$ 都满足 $k^2 > \lambda_0(D)$. |

参 考 文 献

- [1] Haddar H. The interior transmission problem for anisotropic Maxwell's equations and its applications to the inverse problem. *Math Meth Appl Sci*, 2004, **27**: 2111-2129
- [2] Cakoni F, Colton D, Monk P. On the use of transmission eigenvalues to estimate the index of refraction from far field data. *Inverse problem*, 2007, **23**: 507-522
- [3] Colton D, Päiväranta L, Lylveste J. The interior transmission problem. *Inverse Probl Imaging*, 2007, **1**(1): 13-28
- [4] Cristo M D, Sun J G. The determination of the support and surface conductivity of a partially coated object. *Inverse Probl*, 2007, **23**: 1161-1179
- [5] Hähner P. On the uniqueness of the shape of a penetrable, anisotropic obstacle. *J Comput Appl Math*, 2000, **116**: 167-180
- [6] Cakoni F, Colton D, Haddar H. The linear sampling method for anisotropic media. *J Comput Appl Math*, 2002, **146**: 285-299
- [7] Haddar H, Monk P. The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse medium problem. *Inverse Probl*, 2002, **18**: 891-906
- [8] Cakoni F, Fares M, Haddar H. Analysis of two linear sampling methods applied to electromagnetic imaging of buried objects. *Inverse Probl*, 2006, **22**: 845-867
- [9] Colton D, Kirsch A. Dense sets and far field patterns for the transmission problem, in *Classical scattering*. *Appl Math Anal*, 1984: 45-54
- [10] Colton D, Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theorey* (2nd Edition). New York: Springer-Verlag, 1998
- [11] Colton D, Monk P. The inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium. *Quart J Mech Appl Math*, 1988, **41**: 97-125
- [12] Colton D, Kirsch A, Päiväranta L. Far field patterns for acoustic waves in an inhomogeneous medium. *SIAM J Appl Math*, 1989, **20**: 1472-1483

- [13] Päiväranta L, Sylvester J. Transmission eigenvalues. *SIAM J Math Anal*, 2008, **40**: 738–753
- [14] kirsch A. On the existence of transmission eigenvalues. *Inverse Probl Imaging*, 2009, **3**(2): 155–172
- [15] Cakoni F, Haddar H. On the existence of transmission eigenvalues in an inhomogeneous medium. *Appl Anal*, 2009, **88**(4): 475–493
- [16] Cakoni F, Colton D, Haddar H. The interior transmission problem for regions with cavities. *SIAM J Math Anal*, 2010, **42**: 145–162
- [17] Cakoni F, Gintides D, Haddar H. The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues. *SIAM J Math Anal*, 2010, **42**: 237–255
- [18] Cakoni F, Gintides D. New results on transmission eigenvalues. *Inverse Probl Imaging*, 2010, **4**: 39–48
- [19] Colton D, Potthast R. The inverse electromagnetic scattering problem for an anisotropic medium. *J Mech Appl Math*, 1999, **52**: 349–372
- [20] kirsch A. The denseness of the far field patterns for the transmission problem. *IMA J Appl Math*, 1986, **37**: 213–225
- [21] kirsch A. An integral equation approach and the interior transmission problem for Maxwell's equations. *Inverse Probl Imaging*, 2007, **1**(1): 107–127
- [22] kirsch A. The factorization method for Maxwell's equations. *Inverse Probl*, 2004, **20**: 117–134
- [23] Cakoni F, Haddar H. A variational approach for the solution of the electromagnetic interior transmission problem for anisotropic media. *Inverse Probl Imaging*, 2007, **1**(3): 443–456
- [24] Buffa A, Houston P, Perugia I. Discontinuous Galerkin computation of the Maxwell eigenvalues on simplicial meshes. *J Comput Appl Math*, 2007, **204**: 317–333

The Interior Transmission Problem for Isotropic Maxwell Equations and Some Estimates on the Index of Refraction

Qu Fenglong

(School of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Shandong Yantai 264005)

Li Xiliang

(College of Mathematics and Information Sciences, Shandong Institute of Business and Technology,
Shandong Yantai 264005)

Abstract: We consider the scattering of time-harmonic electromagnetic waves by a bounded, penetrable, inhomogeneous, isotropic obstacle covered with a thin layer of high conductivity. Such penetrable obstacle problems lead to the so called interior transmission problem. By using a variational argument, the well-posedness of the corresponding interior transmission problem is established, which extends the results of [1] to the conductive boundary value problem case. Under the assumption that the shape and location of the scatter has been determined, we proceed with some estimates on the index of refraction based on the use of the transmission eigenvalues, the radius of the scatter and the first Maxwell eigenvalue of the curlcurl operator corresponding to the medium, which extends the results in [2].

Key words: Well-posedness; Maxwell equations; Interior transmission problem; Transmission eigenvalues; Index of refraction.

MR(2000) Subject Classification: 35P25; 35R30